Негосударственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Институт непрерывного образования»

Л.А.Бакст

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для бакалавров по направлениям подготовки
«Экономика», Менеджмент»
(математический цикл дисциплин)

Москва
2013

УДК

ББК

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Коробко В.И.,

зав. кафедрой экономики и управления НОУ ВПО ИНО

Составитель: Бакст Л.А.

Финансовая математика: Учебно-методическое пособие / НОУ ВПО «Институт непрерывного образования». Сост. Бакст Л.А. Москва, 2013 г. – 119с.

Пособие предназначено для студентов дневного и заочного отделения направлений подготовки 080100.62 «Экономика» и 080200.62 «Менеджмент» (математический цикл дисциплин).

УДК

ББК

ВВЕДЕНИЕ

Программа курса включает тематику одного из важных и практически крайне значимых направлений прикладных вычислений, получившего название – финансовой математики.

Данная дисциплина преследует цель познакомить студента с математическим инструментарием решения финансовых задач современной экономики в широком спектре условий, сложности, специфики и природы экономических процессов. Полученные знания базируются на достижениях современной науки и позволяют квалифицированно решать конкретные финансово-экономические вопросы, возникающие в практической деятельности.

Содержание курса «Финансовая математика» опирается на содержание других математических дисциплин, таких как: «Математический анализ», «Линейная алгебра», и др. Однако, его основным фундаментом служит тесная связь с соответствующими разделами финансовых, экономических и юридических дисциплин, изучаемых в ВУЗе, что требует от студента глубоких и прочных знаний их положений, используемой терминологии, постоянного обращения к соответствующим источникам.

Отметим, что практика финансовых расчетов широко использует процентные отношения. Хотя математический аппарат, в этом случае, может показаться простым, однако, конкретное его приложение для разнообразных по форме и содержанию финансовых приложений часто далеко не очевидно, и вызывает определенные сложности. С целью приобретения необходимых навыков процентных вычислений, в состав лекций введен соответствующий раздел, фактически предваряющий основное содержание курса. Учащимся настоятельно рекомендуется тщательно проработать предлагаемые задания.

Курс соответствует образовательной программе для специальностей экономического цикла, имеет ярко выраженный *прикладной* характер и отвечает требованиям государственного образовательного стандарта.

В результате изучения курса студент *должен*:

- знать основные положения теории вычисления процентных отношений различных видов, методы оценки и характеристики финансовых потоков, доходности ценных бумаг, включая облигации, портфельных инвестиций, численную оценку финансовых рисков и др.

- уметь применять математический инструментарий финансового анализа для целей теоретического и экспериментального исследования при решении финансово-экономических задач;

- владеть навыками применения современных компьютерных технологий и программ для решения финансово-экономических задач.

Финансовая математика

Тема 1. Простые и сложные проценты.

Введение. Простые проценты. Сложные проценты. Кратное начисление процентов. Непрерывное начисление процентов. Эквивалентность процентных ставок в схеме сложных процентов. Сравнение наращения по простой и сложной ставкам процента.

Тема 2. Дисконтирование и удержание процентов.

Сравнение дисконтирования по сложной и простой учетной ставке. Мультипликатирующие и дисконтные множители. Правило 70. Влияние инфляции на ставку процента. Формула Фишера. Синергетический эффект. Эффективная процентная ставка. Учет инфляции и налогов. Внутренняя норма доходности. Операции с валютой.

Тема 3. Финансовые потоки.

Финансовые потоки (потоки платежей). Текущая, современная, будущая приведенная и конечная величины финансового потока. Средний срок финансового потока. Непрерывное начисление платежей.

Тема 4. Регулярные потоки платежей. Рента.

Обыкновенные ренты. Коэффициенты приведения и наращивания рент. Рента постнумерадо и пренумерадо. Расчет параметров ренты. Вечные, срочные и непрерывные ренты. Связь между приведенной и наращенной величинами ренты. Ренты пренумерадо. Ренты с платежами в середине периодов. Немедленные и отложенные ренты. Арифметические и геометрические ренты. Сравнение финансовых потоков и рент. Конверсия рент.

Тема 5. Доходность финансовых операций.

Доход и доходность финансовых операций. Доходность за несколько периодов. Синергетический эффект. Коррелированность финансовых операций.

Тема 6. Риски финансовых операций.

Виды финансовых рисков и их количественная оценка. Методы уменьшения финансовых рисков: диверсификация и хеджирование. Матрицы последствий и рисков. Правило Вальда. Правило Сэвиджа. Правило Гурвица. Финансовые операции и принятие решений в условиях неопределенности. Правило максимизации среднего дохода и правило минимизации среднего риска. Правило Лапласа равновозможности.

Тема 7. Портфельный анализ.

Доходность ценной бумаги и портфеля. Портфель заданной эффективности. Портфель заданного риска. Портфели Марковица. Портфель минимального риска. Портфель максимальной эффективности. Портфели Тобина.

Тема 8. Оптимальные неотрицательные портфели.

Теорема Куна-Таккера. Доходность неотрицательного портфеля. Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами. Портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами. Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами. Диверсификация портфеля.

Тема 9. Облигации.

Облигации, основные понятия. Текущая стоимость облигации. Текущая доходность и доходность к погашению. Зависимость доходности к погашению облигации от параметров. Дополнительные характеристики облигации: средний срок поступления дохода, дюрация облигации. Выпуклость облигации.

Тема 10. Портфель облигаций.

Портфель облигаций. Иммунизация портфеля облигаций. Доходность портфеля облигаций. Средний срок поступления дохода портфеля. Дюрация портфеля облигаций и его выпуклость.

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Введение

Современный этап развития России характеризуется, в том числе, повышенным вниманием к различным сторонам финансовой деятельности, реализуемыми органами управления, государственными и негосударственными организациями и учреждениями. Правительством РФ принято решение о создании в Москве мирового финансового центра. Формирование Евразийского Союза способствует включению России в состав ведущих стран мировой финансовой системы.

С другой стороны, развитие рыночной экономики во всех ее сферах и проявлениях требует решения разнообразных финансовых вопросов и проблем на самых различных уровнях, начиная от планирования личного и семейного бюджета до финансового анализа и управления бизнес-процессами фирм и предприятий различных форм собственности. Проведение такого анализа, выполнение необходимых расчетов требует привлечения соответствующих математических методов и инструментов.

Следует отметить, что изучаемый материал имеет достаточно глубокие корни в российском образовании. В высших коммерческих учебных заведениях дореволюционной России читались такие дисциплины как: «Высшие финансовые вычисления», «Долгосрочные финансовые операции», «Политическая арифметика» и др.

В этой области плодотворно работали многие российские ученые, среди которых: И.З. Бревдо, Р.Я. Вейцман, П.М. Гончаров, И.И. Кауфман, Н.С. Лунский, Б.Ф. Мелешевский и другие.

Современники отмечали, в частности, работу Б.Ф.Малешевского "Теория и практика пенсионных касс". СПб., 1890, первый том которого "Теория долгосрочных финансовых вычислений" посвящен основам высших финансовых вычислений.

В Московском коммерческом училище (в настоящее время - Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова) функционировала соответствующая кафедра, руководитель которой Н.С. Лунский опубликовал фундаментальный для своего времени учебник "Высшие финансовые вычисления" (М., 1916).

А.П. Рудановский и Н.А. Блатов предложили методики анализа баланса, которые и сегодня остаются актуальными для целей финансового менеджмента.

В период социалистического развития России, направление финансовой математики, разумеется, не было предано забвению и развивалось в направлении описания и анализа плановых показателей экономики и финансов. Однако, существенный всплеск внимания к нему произошел лишь в 90-е годы в связи с переходом на рельсы рыночной экономики, и в настоящее время продолжает активно развиваться.

Так, в последние годы разработана концепция «***Национальной программы повышения уровня финансовой грамотности населения Российской Федерации***»[1]**.**

«Основной целью Национальной программы является развитие человеческого потенциала, повышение уровня благосостояния и финансовой безопасности граждан России, повышение долгосрочного инвестиционного спроса и укрепление стабильности финансовой системы через резкое повышение эффективности домохозяйств в принятии финансово-экономических решений за счет кардинального повышения уровня финансовой грамотности населения, внедрения массовых эффективных стереотипов принятия экономических решений гражданами России.

В рамках Национальной программы под финансовой грамотностью населения понимается способность граждан России:

- *эффективно управлять личными финансами;*
- *осуществлять учет расходов и доходов домохозяйства и осуществлять краткосрочное и долгосрочное финансовое планирование;*
- *оптимизировать соотношение между сбережениями и потреблением;*
- *разбираться в особенностях различных финансовых продуктов и услуг (в том числе инструментов рынка ценных бумаг и коллективных инвестиций), иметь актуальную информацию о ситуации на финансовых рынках;*

---

[1] Концепция «Национальной программы повышения уровня финансовой грамотности населения Российской Федерации»; источник: http://gov.cap.ru/hierarhy.asp?page=./25/426831/798012

- *принимать обоснованные решения в отношении финансовых продуктов и услуг и осознано нести ответственность за такие решения;*
- *компетентно планировать и осуществлять пенсионные накопления.»*

17 октября 2012 года в Москве состоялся Первый Всероссийский Конгресс «Финансовое просвещение граждан России: опыт и новые решения».

Все это лишь подчеркивает важность и актуальность рассматриваемых в данном курсе вопросов.

ТЕМА 1. Простые и сложные проценты.

Основные вопросы темы

1. Основные определения.
2. Простые и сложные проценты.
3. Кратное и непрерывное начисление процентов.
4. Сравнение наращения по простой и сложной ставкам процента.

1.1 Основные определения

Прежде всего, дадим основные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заёмщик — сторона по кредитным отношениям, получающая кредит и принимающая на себя обязательство возвратить в установленный срок ссуженную стоимость и уплатить процент за время пользования ссудой (Гражданский кодекс РФ, глава 42).

В рамках кредитных отношений один и тот же экономический субъект может выступать одновременно как кредитор и как заёмщик. Так, например, если фирма получает в банке кредит, она является заёмщиком, а банк кредитором. С другой стороны, когда фирма хранит свои денежные средства в банке, то она является кредитором, а банк - заёмщиком.

Предоставление кредита сопровождается заключением соответствующего договора, содержащего условия договора займа, к которым, в частности, относятся:

- сумма займа;
- срок погашения займа;
- размер процентов[2]; и др.

Процент.

Поясним содержание термина «***процент***» (англ. – *percent*). У этого слова латинские корни: "*pro centum*", что переводится как *сотая доля*. Во второй половине 19 века этот термин начинает активно ис-

[2] Если в договоре займа размер процентов не установлен, их размер определяется существующей в месте жительства/нахождения займодавца ставкой банковского процента (ставкой рефинансирования) на день уплаты суммы долга. Договор займа может быть и беспроцентным. Однако, следует учитывать, что согласно Налоговому кодексу РФ, получение беспроцентного займа резидентами РФ может нести налоговые последствия.

пользоваться в экономике в значении прибыль (выгода, преимущество).

Современное финансовое толкование процента определяется как плата, которую одно лицо (заемщик) передает другому лицу (кредитору) за то, что последний предоставляет первому во временное пользование денежные средства (Экономический словарь: http://dictionary-economics.ru). Размер этой платы определяется понятием «***ставка процента***».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ставка процента*** — цена денежных услуг, рассчитанная в процентах по отношению к взятой в кредит сумме. Ставке процента, как понятию, содержательно тождественны следующие понятия: ***процентная ставка***, ***норма процента***, ***ссудный процент***, ***процент*** (Экономический словарь. http://dictionary-economics.ru).

Таким образом, *ставка процента*, согласно определению, — это цена денежных услуг, выраженная в процентах по отношению к сумме кредита.

Наряду с понятием «ставка процента», используется ***термин «эффективная ставка процента***».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эффективная ставка процента*** определяется как сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору[3]) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода.

Пусть первоначальный вклад в банк составляет S_0 денежных единиц. Срок вклада, величина ставки процента – i, периодичность выплат – n определены договором. Найдем размер эффективной ставки процента для произвольного момента времени – t :

$$i_1 = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \quad i_2 = \frac{S_2 - S_1}{S_1}, \quad i_3 = \frac{S_3 - S_2}{S_2}, \quad \dots \quad , \quad i_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} .$$

Представленные выше соотношения демонстрируют, что, эффективная ставка процента, в общем случае, не является постоянной величиной и зависит от значения n.

[3] **Инвестор** — лицо или организация (в том числе компания, государство и т. д.), совершающее связанные с риском вложения капитала, направленные на последующее получение прибыли (инвестиции). Если тот или иной проект будет убыточным, то капитал будет утрачен полностью или частично (wikipedia).

В финансовой практике широко распространены две схемы начисления процентов, именуемые «простые проценты» и «сложные проценты». Рассмотрим эти схемы более подробно.

1.2 Простые проценты

При использовании схемы простых процентов базой расчета всегда служит значение первоначальной суммы S_0. Поэтому, значение наращенной суммы равно:

- к концу первого периода:

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1+i);$$

- к концу второго периода:

$$S_2 = S_0 + iS_0 = S_0(1+2i);$$

- к концу третьего периода:

$$S_3 = S_0 + iS_0 = S_0(1+3i);$$

…

- к концу периода n:

$$S_n = S_0 + iS_0 = S_0(1+ni).$$

Полученная формула носит название ***формулы простых процентов***; величина $(1+ni)$ определяет ***коэффициент*** (***множитель) наращения*** а значение ni – ставку процента к концу временного периода n. Значение наращенной суммы пропорционально начальному вкладу S_0 и коэффициенту наращения.

Можно видеть, что совокупность значений S_0, S_1, S_2, S_3, …, S_n, образуют арифметическую последовательность[4] с начальным значением S_0 и разностью iS_0.

Рассчитаем эффективную ставку процента для данной схемы:

$$i_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_0(1+ni) - S_0(1+(n-1)i)}{S_0(1+(n-1)i)} = \frac{1+ni-1-ni+i}{1+(n-1)i} = \frac{i}{1+(n-1)i}\ .$$

Анализ полученного выражения показывает, что эффективная ставка процентов в рассмотренной схеме не остаются постоянной, но убывает с ростом n.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для накопительного вклада до востребования, момент его возврата – не определен. В этом случае, исчисление нара-

[4] **Арифмети́ческая прогре́ссия** — числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, есть сумма предыдущего члена и некоторого постоянного числа d, называемого разностью или шагом арифметической прогрессии (http://ru.wikipedia.org).

щенной суммы определяется условиями договора. В частности, может быть использована непрерывная модель, определяемая формулой:

$$S_t = S_0\left(1+(t-t_0)\,i\right),$$

где: t_0 определяет момент вклада средств, а t – момент возврата наращенной суммы.

Приведенное выражение определяет линейную функцию, определенную для значений $t \ge t_0$. График этой функции в координатах «время-деньги» представляет собой луч, исходящий из точки (t_0, S_0) с угловым коэффициентом, равным $i \cdot S_0$.

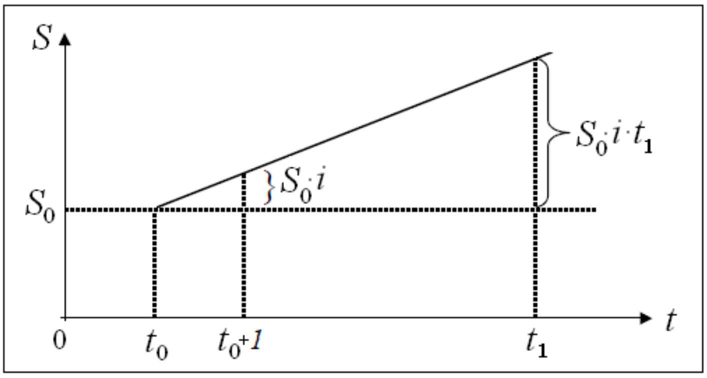


Рисунок. График изменения наращенной суммы для непрерывной модели простых процентов

В случае, если момент t_0 принимается за начало отсчета (или в случае $t_0=0$), уравнение непрерывной модели упрощается:

$$S_t = S_0\left(1+it\right).$$

Сложные проценты

При использовании схемы простых процентов базой расчета щенной величины S_n всегда служило значение первоначальной суммы S_0. Иными словами, данная схема не предполагала ***реинвестирование*** (***капитализацию***) полученных процентов.

В отличие от нее, схема сложных процентов использует данный ресурс: реинвестирование полученных процентов. Поэтому, базой расчета S_n служит наращенное на предыдущем этапе значение суммы S_{n-1}.

Поэтому, значение наращенной суммы равно:

- к концу первого периода:

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1+i);$$

- к концу второго периода:

$$S_2 = S_1 + iS_1 = S_1(1+i) = S_0(1+i)^2;$$

- к концу третьего периода:

$$S_3 = S_2 + iS_2 = S_2(1+i) = S_0(1+i)^3;$$

…

- к концу периода n:

$$S_n = S_{n-1} + iS_{n-1} = S_{n-1}(1+i) = S_0(1+i)^n.$$

Полученная формула носит название ***формулы сложных процентов.*** Она демонстрирует, в частности, что значение наращенной суммы пропорционально начальному вкладу S_0 (как и в случае простых процентов) и коэффициенту (множителю) наращения, который для рассматриваемой схемы равен $(1+i)^n$.

Можно видеть, что совокупность значений S_0, S_1, S_2, S_3, …, S_n, образуют геометрическую прогрессию[5] с начальным значением S_0 и знаменателем прогрессии $(1+i)$.

Рассчитаем эффективную ставку процента:

$$i_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_0(1+i)^n - S_0(1+i)^{n-1}}{S_0(1+i)^{n-1}} = \frac{S_0(1+i)^{n-1}((1+i)-1)}{S_0(1+i)^{n-1}} = i \quad .$$

Полученное выражение показывает, что эффективная ставка процента в схеме сложных процентов является постоянной, не зависит от значения n (в отличии, например, от схемы простых процентов), и совпадает с номинальной ставкой процента.

Проценты за n лет можно представить в виде:

$$I_n = S_0\left[(1+i)^n - 1\right].$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и для случая простых процентов, схема сложных процентов допускает построение непрерывной модели. В этом случае может быть использована формула:

$$S(t) = S_0(1+i)^{\frac{t}{T}},$$

где: T – период начисления.

1.3 Кратное начисление процентов

Современная практика финансовых операций позволяет проводить начисление процентов несколько раз – m в году (ежеквартально, ежемесячно и др.). В этом случае число выплат увеличиться в m раз и

---

[5] **Геометри́ческая прогре́ссия** — последовательность чисел (*членов* прогрессии), в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число q (*знаменатель* прогрессии).

будет равно mn, а ставка процента, соответственно уменьшится в m раз и будет равно $\frac{i}{m}$.

Найдем, чему будет равна наращенная сумма для случая простых и сложных процентов.

а) Схема простых процентов:

$$S_n = S_0\left(1 + nm\frac{i}{m}\right) = S_0(1 + ni).$$

б) Схема сложных процентов:

$$S_n(m) = S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Анализ этих формул показывает, что наращенная сумма для случая простых процентов не изменилась, а для схемы сложных процентов является монотонно возрастающей функцией кратности – m, достигающей своего максимума при $m \to \infty$. Этот предельный случай носит название ***непрерывного начисления процентов***, и будет проанализирован ниже. Расчеты показывают, что уже при $m \geq 6$, значение функции становятся близким к предельному, и дальнейшее ее возрастание при увеличении m происходит крайне медленно.

Непрерывное начисление процентов

Исследуем более детально предельный случай непрерывного начисления процентов. Вычислим значение предела [6]:

$$S_n(m \to \infty) = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = S_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = S_0 e^{in}.$$

Пример[7]. В банк положен депозит в размере 1000 руб. под 10%. Найти величину депозита спустя три года при начислении по схеме простых и сложных процентов при кратности начисления 1, 4, 6, 12 раз в году, а также в случае непрерывного начисления процентов.

Решение.

Выше было показано, что при использовании схемы простых процентов, кратность начисления не влияет на конечный результат.

---

[6] Предельное значение исследуемого выражения определяется посредством второго замечательного предела.

[7] Приведенные примеры даются по учебному пособию: Финансовая математика: учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П.Брусов, Н.П.Орехова, С.В.Скородулина. – М.: КНОРУС, 2010 – 224с. – (Для бакалавров). В некоторых случаях примеры даются с модификациями.

Воспользуемся формулой $S_n = S_0(1+ni)$. Согласно условию задачи: i=0,1; n=3. Поэтому:

$$S_n = S_0(1+ni) = 1000\,(1+3\cdot 0{,}1) = 1300$$

Для расчета по схеме сложных процентов воспользуемся формулой $S_n(m) = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$. Кратность начисления - m может принимать значения 1; 4; 6 и 12. Таким образом:

$$S_3(m=1) = S_0\left(1+\frac{0.1}{1}\right)^{1\cdot 3} = 1331 \text{ руб.}; \qquad S_3(m=4) = S_0\left(1+\frac{0.1}{4}\right)^{4\cdot 3} = 1346{,}5 \text{ руб.};$$

$$S_3(m=6) = S_0\left(1+\frac{0.1}{6}\right)^{6\cdot 3} = 1346{,}5;\ S_3(m=12) = S_0\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12\cdot 3} = 1348{,}5 \text{ руб.};$$

$$S_n(m\to\infty) = S_0 e^{in} = 1000\cdot \mathring{a}^{0.1\cdot 3} = 1000\cdot \mathring{a}^{0.3} = 1349{,}6 \text{ руб.}$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Результаты расчета для различных схем начисления процентов (руб.)						
Вычисляемая величина	Схема простых процентов	Схема сложных процентов				Непрерывное начисление процентов
		m=1	m=4	m=6	m=12	
Наращенная сумма	1300	1331	1344,9	1346,5	1348,2	1349,6
Проценты за три года	300	331	344,9	346,5	348,2	349,6

Анализ результатов таблицы показывает, что:

1. Значение наращенной суммы в схеме сложных процентов больше, чем в схеме простых процентов;
2. С увеличением кратности начисления процентов растет наращенная сумма и процент за три года;
3. Скорость роста наращенной суммы и суммарного процента – убывает с ростом m;
4. Максимальное значение накопленной суммы достигается в случае непрерывного начисления процентов.

Пример. Вклад в размере 3000 руб. положен в банк на депозит 10 марта под 15% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 22 октября.

Решение. Прежде всего отметим, что порядок и размер выплат вне сроков кратности начисления процентов определяется договором вклада. Далее будем предполагать, что договором разрешены выплаты вне сроков кратности с начислением процентов в долях периода. В этом случае может быть использована формула непрерывной модели начисления сложных процентов:

$$S(t) = S_0(1+i)^{\frac{t}{T}},$$

где: T – период начисления.

Период начисления – T, согласно условию задачи, равен одному году. Для унификации расчетов (если это не оговорено особо) в непрерывных моделях используется значение периода начисления T=365 дней, а длительность месяца – равной 30 дней.

Найдем длительность нахождения денег на депозите – t :

$$t = 20 + 30 \cdot 6 + 22 = 162 \text{ дня.}$$

Таким образом:

$$S(162) = 3000(1 + 0{,}15)^{\frac{162}{365}} = 3266{,}07 \text{ руб.}$$

1.4 Сравнение наращения по простой и сложной ставкам процента

Проведем сравнение наращенных сумм, используя непрерывные модели для схем простых:

$$S(t) = S_0(1+it), \qquad \text{(I)}$$

и сложных процентов:

$$S(t) = S_0(1+i)^t. \qquad \text{(II)}$$

На рисунке ниже приведены графики для обоих случаев, отображающие возрастание наращенных сумм для непрерывной модели простой (I) и сложной (II) ставки процентов.

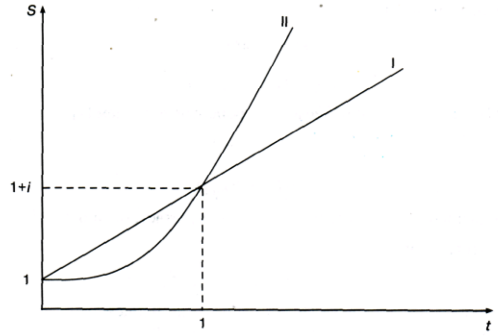


Рисунок. Сравнение наращенных сумм для непрерывной модели простой (I) и сложной (II) ставки процентов.

Из графика видно, что для значений $t<1$ график (II) лежит ниже графика (I), а для значений $t>1$ относительное положение графиков меняется на противоположное.

Для случая дисконтирования, результат получается схожий (см. рисунок ниже).

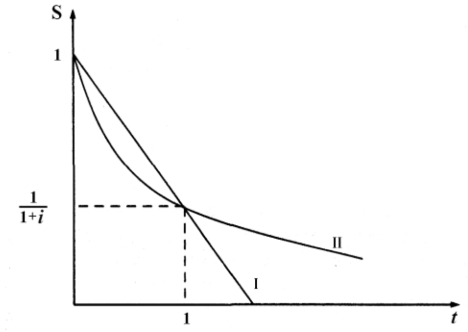


Рисунок. Сопоставление дисконтирования по схеме простых и сложных процентов.

Тема 2. Дисконтирование и удержание процентов.

Основные вопросы темы

1. Дисконтирование по сложной и простой ставке.
2. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители. Правило 70.
3. Влияние инфляции на ставку процента. Формула Фишера. Синергетический эффект.

2.1 Дисконтирование по сложной и простой ставке.

Математическое дисконтирование

Непрерывные модели начисления процентов для случая простых, сложных и непрерывных процентов могут быть использованы для определения величины начального вклада S_0, обеспечивающего необходимое значение наращенной суммы S_t спустя t лет при заданной процентной ставке i . Это может быть сделано путем преобразования соответствующих формул наращенных сумм для различных схем начисления процентов:

$$S_0 = \frac{S_t}{1+ti}$$ для случая простых процентов;

$$S_0 = \frac{S_t}{(1+i)^t}$$ для случая сложных процентов; и

$$S_0 = \frac{S_t}{\exp(\delta t)}$$ для случая непрерывных процентов.

В такой постановке задачи, величину S_0 принято называть ***приведенным значением*** S_t, а величины i и δ носят называние ***ставок дисконтирования***.

Банковский учет

Задача, близкая к математическому дисконтированию, решается при покупке банком векселя (или иных денежных обязательств) по цене S_n ниже его номинальной цены S_0 (такая покупка называется учетом векселя). Цена S_n , определяющая величину дисконта – I_n зависит от числа лет – n, оставшихся до срока погашения векселя:

$$S_n = S_0 - I_n \ .$$

При n=1, величина дисконта I_1 определяется выражением:

$$I_1 = S_0 \cdot d \ ,$$

где d – учетная ставка (ставка дисконтирования).

Если срок погашения более одного года (n>1), то величина дисконта определяется используемой схемой простых или сложных процентов.

Для случая простых процентов, суммарная величина дисконтирования за n лет составит:

$$I_n = S_0 \cdot d \cdot n \ ,$$

что и определит стоимость покупки (учета) векселя:

$$S_n = S_0 - I_n = S_0 - S_0 \cdot d \cdot n = S_0 (1 - d \cdot n).$$

Для случая сложных процентов, стоимость покупки (учета) векселя может быть найдена из выражения:

$$S_n = S_0 \cdot (1 - d)^n \ .$$

Дисконтирование по схеме простых и сложных процентов

На графике ниже приводится сопоставление величин дисконтирования для схемы простых (I) и сложных (II) процентов.

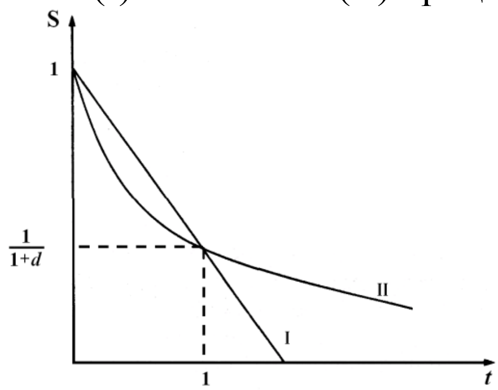


Рисунок. Сопоставление дисконтирования по схеме простых (I) и сложных (II) процентов.

Из рисунка видно, что при значениях t меньше 1 график (II) лежит ниже графика (I), а при значениях t больше 1 относительное положение графиков меняется на противоположное.

Эффективная учетная ставка дисконтирования

Найдем выражение для годовой эффективной учетной ставки дисконтирования - d_{eff} при кратности начисления – m. Исходя из принципа эквивалентности наращенных сумм, запишем:

$$S_0 \left(1 - d_{eff}\right)^n = S_0 \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{nm},$$

где: d – номинальная годовая учетная ставка дисконтирования.

Сокращая S_0 и извлекая корень степени n, получим:

$$\left(1-d_{eff}\right)=\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m},$$

откуда:

$$d_{eff}=1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m}.$$

При необходимости расчета номинальной учетной ставки дисконтирования, она может быть найдена из полученного выше выражения:

$$d_{eff}=m\left(1-\sqrt[m]{1-d_{eff}}\right).$$

Получим, также соотношение учетной ставки процентов - i , и ставки дисконтирования – d, приводящих за промежуток времени t к одинаковым результатам в схеме простых процентов:

$$S_t=S_0\left(1+it\right) \qquad \text{(наращение суммы } S_0 \rightarrow S_t\text{)},$$
$$S_0=S_t\left(1-dt\right) \qquad \text{(дисконтирование суммы } S_t \rightarrow S_0\text{)}.$$

Откуда:

$$S_t=S_0\left(1+it\right)=S_t\left(1-dt\right)\left(1+it\right) \Rightarrow \left(1-dt\right)\left(1+it\right)=1.$$

Полученное выражение может быть преобразовано к виду:

$$i=\frac{d}{1-td}, \text{ или } d=\frac{i}{1+ti}.$$

Аналогично, можно получить подобные соотношения и для схемы сложных процентов с кратностью наращивания – m, и кратностью дисконтирования p.

$$S_t=S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} \qquad \text{(наращение суммы } S_0 \rightarrow S_t\text{)},$$
$$S_0=S_t\left(1-\frac{d}{p}\right)^{p\cdot t} \qquad \text{(дисконтирование суммы } S_t \rightarrow S_0\text{)}.$$

Откуда:

$$S_t=S_t\left(1-\frac{d}{p}\right)^{p\cdot t}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} \Rightarrow \left(1-\frac{d}{p}\right)^{p\cdot t}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}=1,$$

или:

$$\left(1-\frac{d}{p}\right)^{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=1,$$

что для случая $p=m$ дает:

$$\left(1-\frac{d}{p}\right)\left(1+\frac{i}{m}\right)=1.$$

2.2 Мультиплицирующие и дисконтирующие множители

В практике финансовых расчетов получили распространение специальные таблицы, содержащие значения так называемых мультиплицирующих – $M(n, i)$ и дисконтирующих – $D(n, i)$ множителей, отражающих во сколько раз возрастет (уменьшится) начальная сумма S_0 (S_t) за n лет при годовой процентной ставке i :

$$S_n = S_0\cdot(1 + i)^n ,$$

или годовой ставке дисконтирования d:

$$S_n = S_t\cdot(1 - d)^n .$$

Соответственно:

$$M(n, i) = S_0\cdot(1 + i)^n ,$$

и

$$D(n, i) = (1 - d)^n .$$

Для случая равенства $d = i$, получим:

$$D(n,i)=\frac{1}{M(n,i)}=(1+i)^{-n}.$$

Правило 70.

Рассмотрим вопрос удвоения исходной суммы S_0 для различных схем начисления процентов: сложных, простых и непрерывных, учитывая кратность их начисления.

Обозначим время удвоения как T .

Для случая сложных процентов, можем записать:

$$2S_0 = S_0\cdot(1 + i)^T ,$$

где ставка начисления i выражена в долях единицы ($0\le i\le 1$).

Сокращая S_0 и логарифмируя, получим:

$$ln2 = T\cdot ln(1 + i) .$$

Воспользуемся известной формулой разложения логарифмической $f(x)=\ln(1+x)$ функции в ряд Маклорена: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!}$ для значений ($-1<x\le 1$), что в первом приближении дает: $f(x)=\ln(1+x)\approx x$. Поэтому:

$$ln2 = T\cdot ln(1 + i) \approx T\cdot i,$$

откуда:

$$T\approx\frac{\ln 2}{i}\approx\frac{0{,}693}{i}.$$

Если ставку начисления i выразить не в долях единицы, а в процентах – i (%), то получим:

$$T \approx \frac{70}{i\,(\%)} \text{ лет.}$$

Решение задачи удвоения исходной суммы S_0 для случая непрерывных процентов дает аналогичный результат. В этом случае:

$$S_t = S_0 e^{it}.$$

Поэтому:

$$2S_0 = S_0 e^{iT}.$$

Откуда:

$$T = \frac{\ln 2}{i} \approx \frac{70}{i\,(\%)}.$$

Решение задачи удвоения исходной суммы S_0 для случая простых процентов дает иной результат (что и следует ожидать). Используя уравнение наращенной суммы для случая простых процентов:

$$S_t = S_0\left(1 + it\right),$$

получим

$$2S_0 = S_0 \cdot (1 + iT).$$

Откуда:

$$T = \frac{1}{i} \text{ лет.}$$

Если ставка i задана в процентах, то:

$$T = \frac{100}{i\,(\%)} \text{ лет.}$$

Рассмотрим, как влияет на результат кратность начисления процентов – m .

Учет кратного начисление процентов.

Для случая простых процентов имеем:

$$S_t = S_0\left(1 + i \cdot t\right).$$

С учетом кратности начисления - m, получим:

$$S_t = S_0\left(1 + \frac{i}{m} \cdot m \cdot t\right) = S_0\left(1 + i \cdot t\right),$$

что совпадает с выражением для случая $m = 1$.

Для анализа случая сложных процентов, напомним вывод, который был сделан ранее при анализе этой схемы:

«наращенная сумма в схеме сложных процентов является монотонно возрастающей функцией кратности – m, достигающей своего максимума при $m \to \infty$ (случай непрерывных процентов)».

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку для обоих этих случаев, время удвоения приблизительно совпадает, то можно сделать вывод, что изменение кратности не повлияет на Правило 70.

Выше рассмотрена задача определения времени удвоения вклада для различных схем начисления процентов. Рассмотрим эту задачу в более общем виде.

Увеличение капитала в произвольное число раз.

Пусть рассматривается задача определения срока увеличения первоначального вклада в n раз.

Используя уравнение наращенной суммы для случая простых процентов:

$$S_t = S_0\left(1+it\right),$$

получим:

$$nS_0 = S_0 \cdot (1 + iT)\ .$$

Откуда:

$$T = \frac{n-1}{i} \text{ лет.}$$

Например, при ставке 10% годовых вклад вырастет в 3 раза за

$$T = \frac{3-1}{0,1} = 20 \text{ лет}\ .$$

Рассмотрим случай сложных процентов. Имеем:

$$nS_0 = S_0 \cdot (1 + i)^T\ .$$

Сокращая S_0 и логарифмируя, получим:

$$ln\ (n) = T \cdot ln(1 + i)\ .$$

Вновь воспользуемся формулой разложения логарифмической $f(x) = \ln(1+x)$ функции в ряд Маклорена, что в первом приближении дает: $f(x) = \ln(1+x) \approx x$. Поэтому:

$$ln\ (n) = T \cdot ln(1 + i) \approx T \cdot i,$$

откуда:

$$T \approx \frac{\ln(n)}{i}.$$

Решение задачи увеличения исходной суммы S_0 в n раз для случая непрерывных процентов дает аналогичный результат. В этом случае:

$$S_t = S_0 e^{it}.$$

Поэтому:

$$nS_0 = S_0 e^{iT},$$

откуда:

$$T = \frac{\ln(n)}{i}.$$

2.3 Влияние инфляции на ставку процента. Формула Фишера.

Реальность экономической жизни требует учитывать инфляционные процессы. Если, например, уровень инфляции составляет α% в год, то это означает, что стоимость товаров и услуг повышается на α%, т.е. в (1+ α) раз. Иными словами, покупательная способность денег, в частности, наращенной суммы - S_α, уменьшится за год в (1+α) раз:

$$S_\alpha = \frac{S_t}{(1+\alpha)}.$$

Откуда (для схемы простых процентов):

$$S_\alpha = \frac{S_t}{(1+\alpha)} = \frac{S_0(1+i)}{(1+\alpha)} = \frac{S_0(1+\alpha-\alpha+i)}{(1+\alpha)} = S_0\left(1+\frac{i-\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Введем обозначение:

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}.$$

Данное выражение носит название «***формула Фишера»***, которая отражает связь процентной ставки с учетом инфляции – i_α и уровня самой инфляции - α.

С учетом формулы Фишера, запишем выражение для наращенной суммы (с учетом инфляции) - S_α **:**

$$S_\alpha = S_0(1+i_\alpha),$$

где: i_α – пересчитанное значение коэффициента наращивания с учетом инфляции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при высоком значении уровня инфляции - α, значение i_α может стать отрицательным. Это означает, что кредитор начинает терять деньги, а заемщик – обогащаться (т.к. он будет возвращать обесцененные деньги). В этом случае, кредитор (банк) вынужден повышать номинальную ставку - i , рассчитав ее из:

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \quad i = i_\alpha(1+\alpha)+\alpha \ ,$$

и поддерживая ее на уровне, не ниже найденного значения.

При малых значениях уровня инфляции, можно считать, что:

$$i_\alpha \approx i-\alpha \ .$$

Темп инфляции за несколько периодов.

Из практики известно, что уровень инфляции не является постоянным. Он изменяется, сохраняя свое значение лишь на отдельных временных интервалах. Следовательно, он наиболее полно описывается кусочно-постоянной функцией.

Определим «*суммарный*» темп инфляции – α за время t, рассмотрев n последовательных временных интервалов t_1, t_2, t_3, … , t_n его образующих: $t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$. Выпишем соответствующие значения наращенных сумм сначала без учета инфляции:

$$S_1 = S_0(1+i)^{t_1}; \quad S_2 = S_0(1+i)^{t_1+t_2}; \quad \ldots \quad ; \quad S_n = S_0(1+i)^{t_1+t_2+\ldots+t_n} ,$$

а затем, с учетом инфляции:

$$S_1 = S_0\frac{(1+i)^{t_1}}{(1+\alpha_1)}; \quad S_2 = S_1\frac{(1+i)^{t_2}}{(1+\alpha_2)} = S_0\frac{(1+i)^{t_1}}{(1+\alpha_1)}\frac{(1+i)^{t_2}}{(1+\alpha_2)} = S_0\frac{(1+i)^{t_1+t_2}}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}; \quad \ldots$$

$$S_n = S_0\frac{(1+i)^{t_1+t_2+\ldots+t_n}}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n)} \ .$$

С другой стороны: $$S_n = S_0\frac{(1+i)^t}{(1+\alpha)} .$$

Откуда: $$(1+\alpha) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n) \ ,$$

или: $$\alpha = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n) - 1 \ .$$

Подведем некоторые итоги проведенного анализа:

1. Полученное выражение для темпа инфляции – α за период $t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$ не зависит от длительности рассматриваемого интервала времени (и его образующих);
2. Темп инфляции за время t не является суммой темпов инфляции отдельных его интервалов, но выражается более сложным выражением:

$$\alpha \neq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \ .$$

3. Раскрыв скобки в выражении $\alpha = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n) - 1$,

можно показать, что значение темпа инфляции – α за время *t* оказывается больше, чем сумма темпов инфляции, наблюдавшейся внутри отдельных его интервалов:

$$\alpha > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \ .$$

Указанное неравенство носит название ***синергетического эффекта***[8].

[8] **Синерги́я** (греч. συνεργία, от греч. syn — вместе, ergos — действующий, действие) — суммирующий эффект взаимодействия двух или более факторов, характеризующийся тем, что их действие существенно превосходит эффект каждого отдельного компонента в виде их простой суммы (Wikipedia).

Тема 3. Финансовые потоки.

Основные вопросы темы

1. Виды потоков платежей, их классификация
2. Финансовые потоки (потоки платежей).

3.1 Виды потоков платежей, их классификация

Финансовые операции часто носят продолжительный характер и состоят не из разового платежа, а из их последовательности, т.е. потока платежей. Примером могут служить погашение долгосрочной ссуды, арендная плата, инвестиция в производство или в ценные бумаги и т.д.

Положительные члены потока характеризуют поступления финансовых средств, а отрицательные – выплатами. Временной период поступления/выплат может быть как постоянным (фиксированным), так и переменным, что определяется условиями договора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Регулярные поступления (выплаты), производящиеся через одинаковые интервалы времени называются ***финансовой рентой*** или ***аннуитетом*** (annuity), независимо от их назначения. Сам термин произошел от регулярных ежегодные отчислений (лат. anno — год). Позднее он был распространен и на другие регулярные последовательности платежей одного знака через одинаковые интервалы времени.

Далее, (для удобства анализа), если не указано другое, все выплаты будем считать положительными.

Примерами ренты являются: квартирная плата; выплаты погашению потребительского кредита; пенсионные начисления; регулярное начисление процентов по банковскому депозиту/ценным бумагам и др. Первоначально рассматривались лишь ежегодные (лат. anno — год) выплаты, оттуда и произошло их название "аннуитет". Позднее оно стало включать и все последовательности платежей одного знака через любые одинаковые интервалы времени.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

- ***член ренты*** – величина каждого отдельного платежа;

- ***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами;

- ***срок ренты*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

- ***процентная ставка*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Дискретной (l, m) - кратной рентой*** называют ренту для которой регулярные выплаты и начисление процентов производятся, соответственно l и m раз в год.

ЗАМЕЧАНИЕ: В случае частых выплат/начислений процентов (например, еженедельных), их проще анализировать как непрерывные, откуда и произошло понятие ***непрерывная рента***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если все выплаты одной величины, т.е. $Y_k = Y$, то рента называется ***постоянной***, в противном случае — ***переменной***.

На практике, условия финансовых операций крайне разнообразны, что предопределяет разнообразный характер потока платежей. Однако, несмотря на широкое разнообразие видов рент, они могут быть классифицированы, используя определенные количественные и качественные признаки:

В зависимости от ***периода продолжительности*** ренты выделяют

- *годовую ренту*, которые представляют собой ежегодные платежи (период ренты равен 1 году);
- *срочную ренту*, для которой период может отличаться от годового.

По ***числу начислений процентов*** различают:

- ренты с начислением *один раз* в год;
- ренты с начислением несколько - *m раз* в год;
- *непрерывное* начисление.

По ***величине*** выплат ренты могут быть:

- *постоянные*, в случае неизменного размера отдельных платежей (т.е. рента с равными членами);
- *переменные*, где величина платежа изменяется (рента с неравными членами).

По ***числу членов*** ренты они бывают:

- *ограниченные ренты* (*ренты с конечным числом членов*). В этом случае число выплат (членов ренты) ограничено и заранее известно; и
- *вечные ренты* (*ренты с бесконечным числом*: $n = \infty$). Примером могут служить бессрочные облигации британского казначейства -

"консоли", выпущенные в XIX веке. Выплаты по ним производятся два раза в год (обычно, под 2,5% годовых), а сама облигация может быть выкуплена в любое время по желанию ее владельца.

По ***условию*** (***вероятности***) ***выплаты*** ренты делятся на:

- *верные (безусловные) ренты*, которые подлежат безусловной выплате вне зависимости от каких-либо условий. В этом случае заранее оговариваются даты первой и последней выплаты. Примером служит выплаты по кредиту;
- *условные ренты*, которые зависят от наступления некоторого условия. Примером может служить пенсия (life annuity), выплата которой начинается после достижения гражданину определенного возраста и др.

По ***методу выплат****ы* платежей выделяют:

- *обычные ренты*, которые на практике встречаются чаще всего,
- с выплатой платежа в конце периода ренты *(постнумерандо);*
- ренты, с выплатой в начале периода ренты *(пренумерандо).*

Иногда выплаты могут производиться в середине каждого периода, примером чего может служить ежемесячная выплата, пенсии в определенный для каждого пенсионера день; характеристики этого случая будут заключены между соответствующими характеристиками рент пренумерандо и постнумерандо.

Если период ренты совпадает с периодом начисления процентов, то рента называется *простой,* в противном случае — *общей.*

Обобщающими характеристиками финансовых потоков являются:

- наращенная сумма;
- современная величина потока платежей.

Тема 4. Регулярные потоки платежей. Рента.

Основные вопросы темы

1. **Наращенная сумма постоянной ренты**
2. **Современная стоимость постоянной ренты**
3. **Переменные и непрерывные ренты**

Обобщающими характеристиками финансовых потоков являются:
- наращенная сумма;
- современная величина потока платежей.

Рассмотрим вычисление этих характеристик для ренты постнумерандо.

4.1. Наращенная сумма постоянной ренты

Наращенная сумма – сумма всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Это может быть итоговый объем инвестиций, обобщенная сумма задолженности, и т.п.

Пусть в конце каждого года, в течение t лет, на счет вносится по R рублей. Тогда, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии: $S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{t-1}$. Используя известную формулу суммы членов геометрической прогрессии, найдем итоговый объем инвестиций с учетом начисленных процентов:

$$S = R\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^t - 1}{i} = R \cdot S(t;i),$$

где: $S(t;i)$ - коэффициент наращения ренты.

Пример: Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд, куда поступают платежи в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 3х лет. Размер разового платежа 4 млн. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 20% годовых. Найти величину фонда на конец срока.

Решение: В этом случае: t=3; i=0,2; R=4 млн. руб. Подставляя в формулу, найдем, что величина фонда на конец срока составит:

$$S = R \cdot S(t;i) = 4 \cdot \frac{(1+0{,}2)^3 - 1}{0{,}2} = 14{,}56 \text{ млн. руб.}$$

Годовая рента с кратностью начисления *m*

Пусть проценты начисляются m раз в году, а платежи делают один раз в конце года. В этом случае, общее число начислений процентов (т.е. число членов ренты) равно $m \cdot t$, и наращенная сумма равна $S = R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1} = R \cdot S\left(mt;\dfrac{j}{m}\right)$, где j - номинальная ставка процентов.

Пример. Решить задачу предыдущего примера при поквартальном начислении процентов.
Решение: Подставляя данные предыдущего примера, с учетом кратности начисления *m*=4, найдем:

$$S = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1} = 4\cdot\frac{\left(1+\dfrac{0{,}2}{4}\right)^{3\cdot 4}-1}{\left(1+\dfrac{0{,}2}{4}\right)^{4}-1} = 14{,}77 \text{ млн. руб.}$$

Как и следовало ожидать, переход от годового начисления процентов к поквартальному увеличивает наращенную сумму.

Рента p-срочная

1) Пусть рента выплачивается p раз в году равными платежами.

   Если проценты начисляются один раз в конце года $(m=1)$, то $S = \dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{(1+i)^{(1/p)t}-1}{(1+i)^{(1/p)}-1} = R\dfrac{(1+i)^{t}-1}{p\left((1+i)^{(1/p)}-1\right)} = R\cdot S^{(p)}(t;i)$. Если годовая сумма платежей R, то каждый раз выплачивается $\dfrac{R}{p}$.

2) Число выплат в году равно числу начислений процентов $(p=m)$, тогда $S = \dfrac{R}{m}\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}-1}{\dfrac{j}{m}} = R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}-1}{j}$.

3) Рента p-срочная с начислением процентов m раз в году. Наращенная сумма такой ренты равна: $S = \dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{(m/p)tp}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{(m/p)}-1} = R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}-1}{p\left(\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}$.

Это самый общий случай p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году. Из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения m и p.

4.2. Современная стоимость постоянной ренты

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты t. Дисконтированная величина первого платежа равна $Rv = R\frac{1}{1+i}$, второго Rv^2 и так далее. Тогда современная стоимость равна:

$$A = Rv\frac{v^t-1}{v-1} = R\frac{1-v^t}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i} = Ra(t;i),$$

где: $a(t;i)$ - коэффициент приведения ренты, он характеризует современную стоимость ренты с членом, равным 1.

В общем случае, при произвольных значениях m и p, современная величина ренты в равна:

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(m/p)}-1\right)}.$$

Определение параметров постоянной ренты

При разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик - S или A, и необходимо рассчитать значение недостающего параметра (R, t, i, p, m). Такие параметры, как m и p, обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры R, t, i. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

Переменные и непрерывные ренты

Как следует из самого названия, члены ***переменной ренты*** не являются неизменными (фиксированными) на весь период выплат, но изменяются по некоторым (как правило, заранее установленным) правилам. Различают несколько видов переменных рент:

– *Ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени* (изменение размеров членов ренты происходят согласно арифметической прогрессии с первым членом Y и разностью а, т.е. образуют последовательность: $Y,\ Y+a,\ Y+2a, ...,\ Y+(n-1)a$);

– Переменная p-срочная рента с постоянным абсолютным приростом. (Пусть Y - базовая величина разовой выплаты, a - годовой прирост выплат. В этом случае последовательные выплаты равны: $Y,\ Y+\frac{a}{p},\ Y+2\frac{a}{p}, \ldots,\ Y+(pn-1)\frac{a}{p}$).

Иногда более адекватное описание потока платежей достигается, когда он воспринимается как ***непрерывный процесс***. Например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом этот поток можно рассматривать как непрерывный.

Различают непрерывные постоянные потоки платежей и непрерывные переменные потоки платежей.

Тема 5. Доходность финансовых операций.

Основные вопросы темы

1. Доход и доходность финансовых операций.
2. Доходность за несколько периодов.
3. Синергетический эффект.

5.1 Доход и доходность финансовых операций.

Величина дохода - P', полученного от реализации финансовой операции является абсолютным показателем, и не всегда удобна для оценки ее эффективности. Поэтому, чаще используется относительный показатель, называемый доходностью и обозначаемый μ.

Доходность[9] - выражает относительное изменение стоимости финансового актива, выраженное в процентах по отношению к его исходной величине - P, и рассчитанное за конкретный период времени (например, за год):

$$\mu = \frac{P' - P}{P},$$

где: P – начальная стоимость финансового актива (например, затраченные на его приобретение);

P' – текущая стоимость актива (например, доход полученный от его реализации) ;

μ – доходность финансовой операции.

5.2 Доходность за несколько последовательных периодов.

Рассмотрим несколько последовательных периодов, каждый из которых характеризуется своей величиной доходности финансовой операции.

Определим, в частности, суммарную доходность за два последовательных периода (см. рисунок ниже).

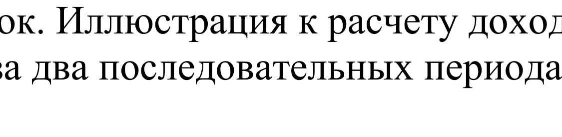


Рисунок. Иллюстрация к расчету доходности
за два последовательных периода.

[9] Также именуется как ***ставка доходности*** (англ. ***rate of return)***

Пусть стоимость актива в начальный момент времени t_0 составляет P_0 денежных единиц. В результате реализации финансовой операции (например, продажи актива), его стоимость изменилась и стала равной P_1, что и определяет полученный доход. Тогда, доходность μ_1 этой (первой) операции равна:

$$\mu_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - 1, \text{ откуда } \mu_1 + 1 = \frac{P_1}{P_0}.$$

Аналогично, получим доходность второй финансовой операции - μ_2 , в результате которой стоимость актива стала равной P_2:

$$\mu_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} - 1, \text{ откуда } \mu_2 + 1 = \frac{P_2}{P_1}.$$

С другой стороны, общая эффективность - μ обоих последовательно реализованных операций может быть записана как:

$$\mu = \frac{P_2 - P_0}{P_0} = \frac{P_2}{P_0} - 1, \text{ откуда } \mu + 1 = \frac{P_2}{P_0}.$$

Преобразуем последнее выражение с учетом двух предыдущих:

$$\mu + 1 = \frac{P_2}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1} = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \quad \Rightarrow \quad \mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) - 1.$$

Проводя аналогичные рассуждения для случая n последовательно реализуемых финансовых операций, получим:

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \quad \ldots \quad (\mu_n + 1) - 1.$$

Для частного случая равнодоходных операций, получим:

$$\mu = (\mu_1 + 1)^n - 1.$$

Синергетический эффект.

Вновь рассмотрим случай двух последовательно реализуемых финансовых операций, записав их общую эффективность:

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) - 1,$$

или (раскрыв скобки):

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2.$$

Полученное выражение демонстрирует наличие синергетического эффекта: результирующая доходность превосходит сумму доходностей отдельных операций.

Тема 6. Риски финансовых операций.

Основные вопросы темы

1. Виды финансовых рисков. Диверсификация и хеджирование.
2. Матрицы последствий и рисков.
3. Принятие решений в условиях неопределенности.
4. Принятие решений в условиях частичной определенности.

6.1 Понятие финансовых рисков и их виды.

При проведении финансовых операций - ФО, естественно стремление оценить их с точки зрения существующих рисков и степени их влияния на возможность и на успешность самих операций (таких как: покупка акций, кредитные и селенговые операции, венчурное инвестирование и др.).

С точки зрения возможного ущерба, риски подразделяются на:

- *допустимые* (связанные с потерей части планируемой прибыли);

- *критические* (связанные не только с возможностью потери прибыли, но и с убытками, критичными для предпринимателя); и

- *катастрофическими* (вплоть до банкротства компании и самого предпринимателя).

Методы оценки и снижения финансовых рисков.

Для количественной оценки риска финансовых операций, величины возможных потерь, а также принятия решений, снижающих (оптимизирующих) величину возможного ущерба, используют объективные и субъективные методы. Широко применяется, в частности: ***диверсификация*** и ***хеджирование***, а также использование разнообразных математических методов и моделей, включая матричные методы, вероятностные методы, аппарат теории игр, и др., позволяющие определить как вероятность наступления неблагоприятных факторов, так и величину возможного ущерба. Рассмотрим некоторые из них.

Дивесификация и хеджирование.

Принцип *диверсификации* финансовых операций говорит о том, что для снижения риска необходимо проводить различные и независимые (т.е. несвязанные друг с другом) операции.

При использовании принципа *хеджирования* (*hedge* – изгородь) проводятся (или специально вводятся/конструируются) дополнительные операции, результат действия которых имеет противоположный эффект по отношению к основным. К ним, в частности, относятся страхование, форвардные контракты и др.

6.2 Матрицы последствий и рисков.

Пусть необходимо принять решение о проведении финансовой операции, которую возможно реализовать несколькими – m способами (например, приобретение товара может быть произведено у m различных производителей). Результат операции характеризуется величиной предполагаемой прибыли, которая, также, не является однозначной, но зависит от конкретной экономической ситуации, в рамках которой она будет реализована.

Пусть для принятия решения рассматривается n – возможных сценариев развития экономической ситуации. Тогда, возможные исходы результата ФО могут быть охарактеризованы матрицей $\underset{m\times n}{Q} = (q_{ij})$, называемой ***матрицей последствий***, где: q_{ij} - характеризует величину прибыли при выполнении ФО i-ым способом в условиях реализации j-го сценария экономической ситуации.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь терминологией теории игр, можно сказать, что способы проведения финансовой операции определяют ***стратегию*** проведения финансовой операции.

Проведем анализ матрицы последствий ***по столбцам***, каждый из которых содержит величины возможной прибыли для конкретной экономической ситуации при выполнении ФО различными способами. Выберем в каждом столбце (каждой экономической ситуации) наибольший элемент (характеризующий максимально возможную прибыль):

$$q_{1\max} = \max(q_{i1} \mid i = 1,\dots,m);$$
$$q_{2\max} = \max(q_{i2} \mid i = 1,\dots,m);$$
$$\dots$$
$$q_{n\max} = \max(q_{in} \mid i = 1,\dots,m).$$

Тогда разность между найденным максимальным значением и другими элементами столбца будет характеризовать величину упущенной прибыли - r_{ij} для различных способов реализации ФО:

$$r_{ij} = q_{j\max} - q_{ij} \Big| \, j = 1,\dots,n .$$

Матрица, составленная из элементов r_{ij} называется ***матрицей рисков***: $\underset{m\times n}{R}=(r_{ij})$, и, также, служит для формирования различных стратегий проведения финансовых операций.

Пример 6.1. Для ФО определена следующая матрица последствий:

$$Q=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 10 \\ 12 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформировать, соответствующую ей матрицу рисков.

Решение. Матрица последствий содержит три строки и четыре столбца. Это означает, что рассматриваемая финансовая операция может быть реализована тремя различными способами, а результат ее проведения (величина прибыли) различен для каждой из четырех рассматриваемых экономических ситуаций. В частности, при реализации ФО вторым способом (выборе второй стратегии), в рамках третьего сценария развития, ожидаемая прибыль составляет 8 у.е. (например, 8 млн. руб.)

Анализируя столбцы матрицы, можно определить максимальную величину прибыли для каждого сценария экономической ситуации. Так, для первого сценария, максимальная прибыль равна 12 у.е. ($q_{1\max}=q_{21}=12$), которая может быть получена при реализации ФО вторым способом; для второго сценария, максимальная прибыль равна 8 у.е. ($q_{2\max}=q_{32}=8$), которая может быть получена при реализации ФО третьим способом; для третьего и четвертого сценариев, соответственно, получим: $q_{3\max}=q_{33}=9$; и $q_{4\max}=q_{14}=10$.

Вычислив для каждого столбца разность между его максимальным элементом и другими элементами, получим матрицу рисков:

$$R=\begin{pmatrix} 12-5 & 8-6 & 9-7 & 10-10 \\ 12-12 & 8-5 & 9-8 & 10-4 \\ 12-3 & 8-8 & 9-9 & 10-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

6.3 Принятие решений в условиях полной неопределенности

Построение матрицы рисков основывалось на анализе матрицы последствий ***по столбцам***, что соответствовало анализу величины ожидаемой прибыли для различных сценариев экономической ситуации. Такой анализ наиболее эффективен, если имеются данные (объективные, или субъективные, включая экспертные оценки) о вероятности реализации конкретного сценария. Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием таких данных. В этом случае, для принятия решений о выборе конкретного способа реализации ФО, могут быть использованы отдельные правила (рекомендации), приведенные ниже. Они основаны на анализе матрицы последствий ***по строкам*** (что соответствует анализу по различным стратегиям реализации ФО).

Правило Вальда (получившее название, ***правило крайнего пессимизма***). Смысловое содержание этого правила состоит в выборе наилучшего варианта реализации ФО в предположении, что любому из них будет сопутствовать наихудший сценарий экономической ситуации, приносящей минимальный доход.

Итак, будем анализировать матрицу последствий $\underset{m\times n}{Q} = \left(q_{ij} \right)$ - по строкам. Для каждой из них найдем минимальный элемент:

$$q_{1\min} = \min\left(q_{1j} \middle| \, j = 1,\dots,n\right);$$

$$q_{2\min} = \min\left(q_{2j} \middle| \, j = 1,\dots,n\right);$$

$$\dots$$

$$q_{m\min} = \min\left(q_{mj} \middle| \, j = 1,\dots,n\right).$$

Таким образом, мы получим набор минимальных значений величины прибыли всех вариантов реализации ФО (соответствующих наихудшим сценариям экономической ситуации).

Теперь, выбрав максимальный из них, мы, фактически, определим оптимальную стратегию ФО – i_{opt} :

$$q_{i\,opt} = \max\left(q_{i\min} \middle| \, i = 1,\dots,m\right).$$

Пример 6.2. Для матрицы последствий предыдущего примера:

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 10 \\ 12 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

определить оптимальную стратегию реализации ФО, используя критерий крайнего пессимизма.

Решение. Анализируя матрицу последствий по строкам, найдем минимальное значение каждой и них:

$$q_{1\min} = \min(5, 6, 7, 10) = 5\,;$$

$$q_{2\min} = \min(12, 5, 8, 4) = 4\,;$$

$$q_{3\min} = \min(3, 8, 9, 1) = 1\,.$$

Теперь выберем максимальный из полученных величин:

$\max(5, 4, 1) = 5$,

что соответствует первому варианту реализации ФО:

$i_{\text{opt}} = 1$.

Вывод: если исходить из предположений о самом неблагоприятном развитии экономической ситуации (согласно правилу крайнего пессимизма), следует рекомендовать первую стратегию реализации ФО.

Целью принимаемых решений может быть не только стремление увеличить размер возможной прибыли, но и минимизировать возможные риски. Такой подход заложен в правиле Сэвиджа, а в качестве инструмента анализа используется матрица рисков - $\underset{m\times n}{R} = (r_{ij})$.

Правило Сэвиджа (***правило минимального риска***). Анализ, также как и в правиле Вальда, проводится по строкам в предположении о самом неблагоприятном экономическом сценарии для рассматриваемого варианта реализации ФО, приводящему к максимально возможному риску. Таким образом, для каждой строки матрицы рисков находим максимум:

$$r_{1\max} = \max\left(r_{1j} \,\middle|\, j = 1,\dots,n\right);$$

$$r_{2\max} = \max\left(r_{2j} \,\middle|\, j = 1,\dots,n\right);$$

$$\dots$$

$$r_{m\max} = \max\left(r_{mj} \,\middle|\, j = 1,\dots,n\right);$$

Таким образом, получен набор максимальных значений риска для всех стратегий реализации ФО (соответствующих наихудшим сценариям экономической ситуации).

Теперь, выбрав минимальный из них, мы, фактически, определим наиболее оптимальную стратегию реализации ФО (с точки зрения риска) – i_{opt} :

$$r_{i\,opt} = \min_i \left(r_{i\max} \,\middle|\, i = 1,\dots,m\right).$$

Пример 6.3. Для матрицы рисков примера 6.2 определить оптимальную стратегию реализации ФО, используя критерий минимального риска.

Решение. Анализируя матрицу риска $R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

по строкам, найдем максимальное значение риска каждой и них:

$$r_{1\max} = \max(7, 2, 2, 0) = 7;$$
$$r_{2\max} = \max(0, 3, 1, 6) = 6;$$
$$r_{3\max} = \max(9, 0, 0, 9) = 9.$$

Теперь выберем минимальный из полученных величин:

$$\min(7, 6, 9) = 6,$$

что соответствует второму варианту реализации ФО:

$$i_{\text{opt}} = 2.$$

Вывод: если исходить из предположений о самом неблагоприятном развитии экономической ситуации (согласно правилу минимизации риска), следует рекомендовать вторую стратегию реализации ФО.

Правило Гурвица (учитывающее/взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы). Согласно этому правилу оптимальным принимается вариант реализации ФО - i_{opt} при котором достигается максимум показателя эффективности Гурвица - G_i:

$$G_i = \left\{\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right\};$$
$$G_{opt} = \max_i G_i,$$

где: λ - весовой коэффициент, принимающий значения от нуля до единицы ($0 \le \lambda \le 1$).

Можно видеть, что правило Гурвица дает решение, приближающееся к правилу Вальда, при значениях λ, близких к единице ($\lambda \to 1$). При малых значениях λ ($\lambda \to 0$), правило Гурвица соответствует ярко выраженному оптимистическому взгляду, предполагающему, что экономическая ситуация всегда будет складываться “наилучшим образом”, обеспечивая максимально возможную прибыль при любой стратегии реализации ФО (по этой причине, коэффициент λ часто называют ***показателем оптимизма***).

Пример 6.4. Для матрицы последствий примера 6.1 определить оптимальный вариант реализации ФО, используя показатель эффективности Гурвица, при значении $\lambda = 0{,}5$.

Решение. Анализируя матрицу последствий $Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 10 \\ 12 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ по строкам, вычислим соответствующие им значения показатель эффективности Гурвица:

$$0{,}5 \cdot \min(5, 6, 7, 10) + 0{,}5 \cdot \max(5, 6, 7, 10) = 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 10 = 7{,}5;$$

$$0{,}5 \cdot \min(12, 5, 8, 4) + 0{,}5 \cdot \max(12, 5, 8, 4) = 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 12 = 8;$$
$$0{,}5 \cdot \min(3, 8, 9, 1) + (1 - 0{,}5) \cdot \max(3, 8, 9, 1) = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 9 = 5.$$

Вывод: Опираясь на значение показателя эффективности Гурвица, следует рекомендовать вторую стратегию выполнения ФО.

6.4 Принятие решений в условиях частичной неопределенности

Выше отмечалось, что проведение анализа наиболее эффективно, если имеются данные о вероятности реализации конкретного сценария экономического развития. Такие данные (объективные, или субъективные) могут быть получены на основе статистического анализа, на основе экспертных оценок, и др. Рассмотрим проведение анализа с учетом этой информации.

Будем полагать, что для каждого варианта развития экономической ситуации имеются данные о вероятности реализации - $p_j \mid j = 1,\ldots,n$ именно этого сценария. Такую ситуацию принято называть ***частичной неопределенностью.*** В этом случае, оптимальная стратегия проведения финансовой операции выбирается на основе нижеследующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Рассмотрим матрицу последствий. Каждая стратегия Q_i (задаваемая строками этой матрицы) может быть охарактеризована рядом распределения величины ожидаемого дохода:

q_{i_1}	q_{i_2}	q_{i_3}	...	q_{i_n}
p_1	p_2	p_3	...	p_n

Тогда, средний ожидаемый доход, при использовании стратегии Q_i, определяется как математическое ожидание – $M(Q_i)$ и обозначается $\overline{Q_i}$. Данное правило рекомендует выбор оптимальной стратегии, обеспечивающей максимальную величину среднего ожидаемого дохода:

$$\overline{Q_{opt}} = \max_j \overline{Q_j}\ .$$

Пример 6.5. Для матрицы последствий задачи 6.1:

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 10 \\ 12 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

определить оптимальную стратегию реализации ФО, используя критерий максимизации среднего ожидаемого дохода, если вероятности реализации рассматриваемых экономических сценариев, соответственно равны: $p_1 = \frac{1}{2}, \; p_2 = \frac{1}{6}, \; p_3 = \frac{1}{6}, \; p_4 = \frac{1}{6}$.

Решение. Вычислим средний ожидаемый доход для каждой стратегии:

$$\overline{Q}_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} \approx 6{,}3 \quad ;$$

$$\overline{Q}_2 = 12 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} \approx 8{,}8 \quad ;$$

$$\overline{Q}_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 4{,}5 \quad .$$

Следовательно:

$$\overline{Q}_{opt} = \max_j \overline{Q}_j = \overline{Q}_2 .$$

Таким образом, опираясь на критерий максимизации среднего ожидаемого дохода, следует рекомендовать вторую стратегию.

Наряду с рассмотренным подходом, используется, также, правило минимизации среднего риска.

Правило минимизации среднего риска. Рассмотрим матрицу рисков. Каждая стратегия R_i (задаваемая строками этой матрицы) может быть охарактеризована рядом распределения величины ожидаемого риска:

r_{i_1}	r_{i_2}	r_{i_3}	…	r_{i_n}
p_1	p_2	p_3	…	p_n

Тогда, средний ожидаемый риск, при использовании стратегии R_i , определяется как математическое ожидание – $M(R_i)$ и обозначается $\overline{R}_i$. Данное правило рекомендует выбор оптимальной стратегии, обеспечивающей минимальную величину среднего ожидаемого риска:

$$\overline{R}_{opt} = \min_j \overline{R}_j \; .$$

Пример 6.6. Для матрицы рисков примера 6.2:

$$R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

определить оптимальную стратегию реализации ФО, используя критерий минимизации среднего ожидаемого риска, если вероятности реализации рассматриваемых экономических сценариев, соответственно равны: $p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{6},\ p_3 = \frac{1}{6},\ p_4 = \frac{1}{6}$.

Решение. Вычислим средний ожидаемый риск для каждой стратегии:

$$\overline{R}_1 = 7 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} \approx 4{,}2 \quad ;$$

$$\overline{R}_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \approx 1{,}7 \quad ;$$

$$\overline{R}_3 = 9 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = 6{,}0 \quad .$$

Следовательно:

$$\overline{R}_{opt} = \min_j \overline{R}_j = \overline{R}_2 .$$

Таким образом, опираясь на критерий минимизации среднего ожидаемого дохода, следует рекомендовать вторую стратегию.

Оптимальность по Парето[10]. Рассмотренные выше правила описывали поиск оптимальной стратегии, опирались на учет только одного оцениваемого фактора: средней ожидаемой прибыли или среднего ожидаемого риска. Теперь, мы сосредоточим усилия на учете обоих этих факторов. Иными словами, рассмотрим задачу поиска оптимальной стратегии двухкритериальной задачи: в нашем случае, это увеличение прибыли при одновременном снижении риска.

Сформулируем общую постановку такой задачи. Рассматриваются две стратегии проведения ФО: стратегия α и стратегия β. Каждой из этих стратегий соответствуют значения средней ожидаемой прибыли и среднего ожидаемого риска, соответственно: $\overline{Q}_\alpha$; $\overline{Q}_\beta$; $\overline{R}_\alpha$; и $\overline{R}_\beta$.

Будем говорить, что стратегия α доминирует стратегию β (что обозначается как $\alpha \succ \beta$, если: $\overline{Q}_\alpha \ \geq \ \overline{Q}_\beta$ и $\overline{R}_\alpha \leq \ \overline{R}_\beta$), причем, хотя бы одно из этих неравенств – строгое. Иными словами α доминирует

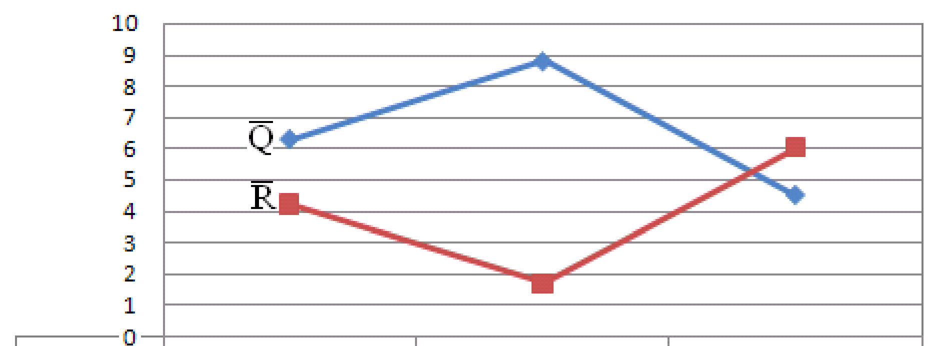
[10] **Оптимальность по Парето (Pareto optimality):** условие эффективности, выведенное экономистом и политологом Вильфредо Парето (1848–1923).

стратегию β, если улучшение одного показателя, по меньшей мере, не ухудшает другой. В этом случае, стратегия α называется ***доминирующей,*** а стратегия β – ***доминируемой***. Совокупность всех доминирующих стратегий называется ***множеством Парето***.

Множество Парето обладает двумя важными свойствами:

1. Оптимальная стратегия принадлежит множеству Парето; и
2. На множестве Парето может быть задана функция, однозначно связывающая значения $\overline{Q}$ и $\overline{R}$.

Вернемся к анализу примеров 6.5 и 6.6 . Сведем результаты их расчета в таблицу и отобразим на рисунке, соединив (для наглядности) отдельные точки отрезками прямых (см.ниже).



стратегия	1	2	3
$\overline{Q}$	6,3	8,8	4,5
$\overline{R}$	4,2	1,7	6

Рисунок. Диаграммы средней ожидаемой прибыли - $\overline{Q}$ и среднего ожидаемого риска - $\overline{R}$

Из рисунка ясно видно, что оптимальной является вторая стратегия (минимальное значение ожидаемого риска и максимальное значение ожидаемой прибыли).

Множество Парето в данном случае состоит из одной точки.

Полученные значения могут быть, также, графически отображены в координатной плоскости $\overline{R}$ - $\overline{Q}$. Чем выше ожидаемый риск, тем правее лежит соответствующая ему точка. Чем больше ожидаемый доход, тем выше лежит находится на графике соответствующая ему точка. Следовательно, оптимальной стратегии соответствует точка, лежащая левее и выше (см. следующий рисунок).

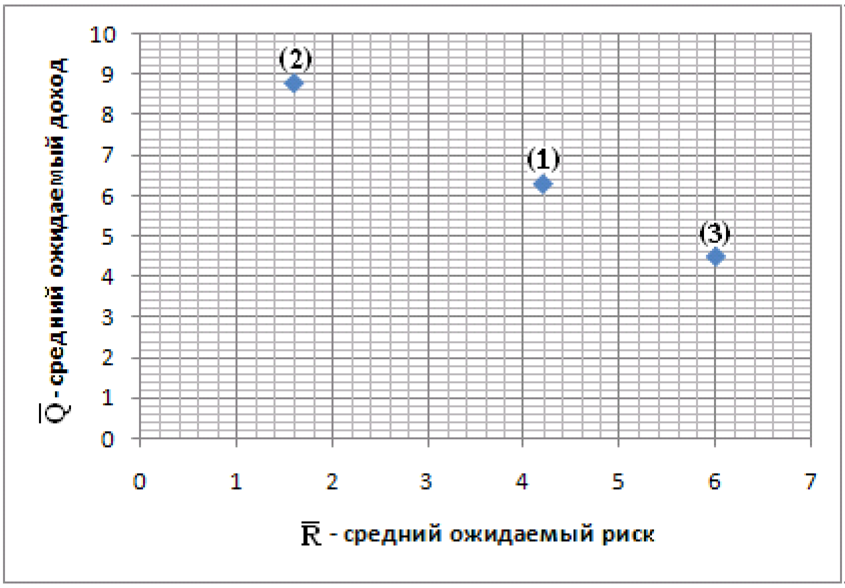


Рисунок. Графическое отображение результатов расчета в плоскости $\overline{R}$ - $\overline{Q}$. Цифрой в скобках отмечен номер стратегии. Оптимальной стратегии соответствует точка, лежащая левее и выше.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренный выше анализ проведен в предположении одинаковой значимости ожидаемого дохода и соответствующего ему риска. Однако, на практике, этого условия не всегда придерживаются, считая приемлемым повышенный уровень риска с целью получения большего дохода. В этом случае, поиск оптимальной стратегии может проводиться с помощью специальных функций (формул), в которых это учитывается с помощью весовых коэффициентов дохода и риска.

Правило Лапласа равновозможности. Оценка среднего ожидаемого дохода и среднего ожидаемого риска может проводиться и в случае отсутствия информации о вероятности реализации отдельных сценариев экономической ситуации. В этом случае, в качестве первого приближения, полагают эти сценарии равновероятными (равновозможными). Далее, проводится анализ, как показано выше. Такое приближение получило название ***правила Лапласа равновозможности***.

Тема 7. Портфельный  анализ.

Основные вопросы темы

1. Доходность ценной бумаги и портфеля.
2. Портфель заданной эффективности. Портфель заданного риска.
3. Портфель Марковица минимального риска. Портфель Тобина минимального риска.
4. Портфель Марковица и Тобина максимальной эффективности.

7.1 Доходность ценной бумаги и портфеля

Основоположником теории портфельных инвестиций является американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz), впоследствии удостоенный за свои работы нобелевской премии. Начало теории положено им в статье "Выбор портфеля" (1952 г.). В ней он не только предложил математическую модель портфельных инвестиций, но и рассмотрел вопросы оптимизации портфеля, с учетом специфики ценных бумаг, его составляющих. В частности, продемонстрирована возможность снижения суммарного риска портфеля путем диверсификации активов его составляющих на базе некоррелируемых акций.

Приведем основные положения этой теории.

Доходность ценной бумаги и портфеля

Рассмотрим временной интервал $[t_0 - t_1]$. Стоимость ценной бумаги в начале и конце этого интервала обозначим как p_0 и p_1, соответственно. Обозначим, также, через δ – дивиденды, полученные владельцем ценной бумаги за рассмотренный период времени. Тогда, величина абсолютного дохода, полученного владельцем может быть записана как:

$$p_1 + \delta - p_0 .$$

Относительная величина дохода, называемая ***доходностью ценной бумаги*** – d, определяется отношением дохода к стоимости ценной бумаги:

$$d = \frac{p_1 + \delta - p_0}{p_0} .$$

Иными словами, доходность ценной бумаги есть доход на единицу ее начальной стоимости[11].

Пусть портфель содержит n различных типов ценных бумаг на приобретение которых затрачен некоторый капитал – K. Найдем суммарную доходность такого портфеля – d_p за рассматриваемый интервал времени. С этой целью, обозначим x_i – долю капитала, затраченного на приобретение ценных бумаг i-го типа ($i = 1 \ldots n$), каждая из которых характеризуется доходностью d_i . Можно показать, что в этом случае, доходность портфеля – d_p может быть записана как:

$$d_p = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_n d_n = \sum_{i=1}^{n} x_i d_i ,$$

где: $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

Стоимость ценных бумаг, а следовательно, и их доходность – d_i , не является постоянной, но меняется в зависимости от конкретного развития экономической ситуации, и целого ряда иных факторов (социальных, политических, и др.). Поэтому, и доходность портфеля, также, не является фиксированной величиной, но зависит от указанных факторов, что предопределяет необходимость использования подходов, связанных наличием неопределенности.

Оценим среднюю ожидаемую доходность портфеля и риск ее получения - $\bar{r}_p$. Рассчитаем среднюю ожидаемую доходность, как ее математическое ожидание – $M(d_p)$:

$$M(d_p) = M(x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_n d_n). .$$

Учтя свойства математического ожидания, окончательно получим:

$$M(d_p) = x_1 M(d_1) + x_2 M(d_2) + \ldots + x_n M(d_n). ,$$

или:

$$M(d_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i ,$$

где: $\mu_i = M(d_i)$ - математическое ожидание доходности ценных бумаг i-го типа называемое их ***эффективностью***.

---

11. Рынок ценных бумаг в России регулируют нормативные документы:
 - Гражданский Кодекс РФ Глава 7 «Ценные бумаги»;
 - Федеральный закон № 39-ФЗ «О рынке ценных бумаг» от 22.04.96г.;
 - Федеральный закон № 208-ФЗ «Об акционерных обществах» от 26.12.95г.; и др.

ЗАМЕЧАНИЕ. Средняя ожидаемая доходность портфеля $M(d_p)$ носит название ***эффективности портфеля*** и обозначается (по аналогии с эффективностью ценной бумаги) как μ_p:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i ,$$

где:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

Риск портфеля – r_p определяется средним квадратическим отклонением доходности портфеля – σ_p, и вычисляется как корень квадратный из дисперсии его доходности – $D(d_p)$:

$$r_p = \sigma_p = \sqrt{D(d_p)},$$

где:
$$D(d_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} ;$$

V_{ij} – ковариация доходностей ценных бумаг типов i и j, и

V_{ii} – дисперсия (вариация) доходностей ценных i-го типа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для портфеля, состоящего только из двух типов ценных бумаг, дисперсия доходности портфеля может быть записана как:

$$D(d_p) = \sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 .$$

Пример 7.1. Портфель наполовину (в стоимостном выражении) состоит из ценных бумаг первого вида с доходностью 10% годовых, и из бумаг второго вида с доходностью 12% годовых. Какова эффективность портфеля?

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i .$$

Подставляя исходные данные, получим:

$$\mu_p = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 12 = 11\% \text{ годовых.}$$

7.2 Портфель заданной эффективности.

Рассмотрим задачу создания портфеля заданной эффективности - μ_p. Исходными данными являются значения эффективности составляющих его ценных бумаг μ_i. Тогда, задача создания портфеля сводится к определению ценовой доли бумаг каждого типа - x_i в составе портфеля. Они могут быть найдены путем решения системы:

$$\begin{cases} \mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим решение этой системы для портфеля из двух бумаг. В этом случае, система примет вид:

$$\begin{cases} \mu_p = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему методом подстановки, найдем:

$$x_2 = 1 - x_1 \quad \Rightarrow \mu_p = x_1\mu_1 + (1 - x_1)\mu_2,$$

Откуда:

$$x_1 = \frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\mu_1 - \mu_p}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Портфель заданного риска.

Рассмотрим теперь задачу создания портфеля заданного риска - r_p. Исходными данными, в этом случае, являются значения риска составляющих его ценных бумаг r_i. Задача создания портфеля (как и в предыдущем случае) сводится к определению ценовой доли бумаг каждого типа - x_i в составе портфеля, определяемых, на этот раз, уже с учетом заданного риска портфеля. Они могут быть найдены путем решения системы:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \\ r_p = \sigma_p = \sqrt{D(d_p)} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}.$$

где:

V_{ij} – ковариация доходностей ценных бумаг типов i и j, и

V_{ii} – дисперсия (вариация) доходностей ценных i-го типа.

Оптимизации портфеля.

Выше рассмотрены вопросы создания портфеля заданной эффективности и риска. Наряду с ними, может быть рассмотрены проблемы оптимизации полученных решений: т.е. минимизации риска и получения максимальной прибыли.

7. 3. Портфель Марковица минимального риска.

Поставим задачу формирования портфеля ценных бумаг, обладающего минимальным значением риска, при обеспечении заданной его эффективности, получившей название ***задачи Марковица***. Используя введенные выше обозначения, задачу Марковица можно сформулировать как определение значений x_i, минимизирующих величину r_p ($r_p \to \min$) и обеспечивающих заданную эффективность портфеля μ_p. Данные условия выражаются системой:

$$\begin{cases} r_p = \sigma_p = \sqrt{D(d_p)} \to \min \\ D(d_p) = \sigma_p^2 = \sum\limits_{i,j} x_i x_j V_{ij} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mu_i = \mu_p \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases},$$

что равносильно системе:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = \sum\limits_{i,j} x_i x_j V_{ij} \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mu_i = \mu_p \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

где: $V_{ij} = \operatorname{cov}(r_i, r_j)$ – ковариация риска ценных бумаг типов *i* и *j*.

Заметим, что риск портфеля - r_p, как функция дисперсии потерь - $D(d_p) = \sigma_p^2$, выражается квадратичной формой переменных x_i, определяющих ценовые доли бумаг каждого типа, что и определяет структуру самого портфеля.

Найденные значения x_i, удовлетворяющие системе, могут быть как положительными, так и отрицательными. Положительные значения ($x_i > 0$) следует интерпретировать как рекомендацию вложить долю x_i в ценные бумаги *i*-го типа; отрицательные - как рекомендацию их “короткой продажи” (“short sale”).

Представим задачу Марковица в матричной форме.

Матричное представление задачи Марковица.

Задачу Марковица удобно записывать в матричной форме. С этой целью обозначим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix}; \quad \text{и}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Совокупность значений ковариации запишем в ковариационную матрицу $V = \|V_{ij}\| = \|\mathrm{cov}(r_i, r_j)\|$:

$$V = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(r_1, r_1) & \mathrm{cov}(r_1, r_2) & \dots & \mathrm{cov}(r_1, r_n) \\ \mathrm{cov}(r_2, r_1) & \mathrm{cov}(r_2, r_2) & \dots & \mathrm{cov}(r_2, r_n) \\ & \dots & \dots & \\ \mathrm{cov}(r_n, r_1) & \mathrm{cov}(r_n, r_2) & \dots & \mathrm{cov}(r_n, r_n) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что диагональные элементы - V_{ii} ковариационной матицы V равны дисперсии (вариации) риска ценных бумаг *i*-го типа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наряду с ковариационной матрицей, рассматривается и корреляционная матрица - $\|\rho(r_i, r_j)\|$, которая имеет вид:

$$\|\rho(r_i, r_j)\| = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1 \sigma_2} & \dots & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1, r_n)}{\sigma_1 \sigma_n} \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_2, r_1)}{\sigma_2 \sigma_1} & 1 & \dots & \dfrac{\mathrm{cov}(r_2, r_n)}{\sigma_2 \sigma_n} \\ & \dots & \dots & \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_n, r_1)}{\sigma_n \sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_n, r_2)}{\sigma_n \sigma_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях задача Марковица может быть записана как:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = X^T V X \to \min \\ M^T X = \mu_p \\ I^T X = 1 \end{cases}$$

7.4 Портфель Тобина минимального риска.

Развивая идеи Марковица, американский экономист Д.Тобин (D. Tobin), также впоследствии удостоенный Нобелевской премии, рассмотрел задачу формирования портфеля минимального риска, при наличии на рынке, так называемых, «безрисковых бумаг». К таким бумагам, в частности, относятся государственные ценные бумаги, однако, как правило, обладающие существенно более низкой доходностью, чем бумаги с высоким риском. К ним, например, можно отнести обязательства Сбербанка России по вкладам “до востребования” с процентной ставкой (на момент написания пособия – 2013 г.) 0,01 % годовых, независимо от вида валюты.

Пусть μ_0 - эффективность безрисковых ценных бумаг, которые составляют в общей стоимости портфеля составляют его x_0-ую часть. Соответственно, на рисковые ценные бумаги приходится (1 - x_0)-ая часть общей стоимости портфеля. Обозначим через μ_r среднюю эффективность рисковых бумаг с дисперсией $D_r = \sigma_r^2$. Риск этих бумах и составляет риск портфеля $r_p = r_r$, и соответственно, оценивается средним квадратическим отклонением:

$$r_p = r_r = \sigma_r = \sqrt{D_r} = \sqrt{D(d_p)}\,.$$

В данной постановке, портфель Тобина описывается системой:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = \sum\limits_{i,j} x_i x_j V_{ij} \to \min \\ x_0\mu_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mu_i = \mu_p \\ x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases},$$

или в матричной форме:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = X^T VX \to \min \\ x_0\mu_0 + M^T X = \mu_p \\ x_0 + I^T X = 1 \end{cases}.$$

Упростим эту систему, выразив из последнего уравнения x_0 и подставив его значение в уравнение эффективности портфеля:

$$\begin{aligned} & x_0 = 1 - I^T X \\ & \left(1 - I^T X\right)\mu_0 + M^T X = \mu_p \end{aligned}.$$

Раскрыв скобки, окончательно получим:

$$\left(M^T - \mu_0 I^T\right)X = \mu_p - \mu_0,$$

или (воспользовавшись свойствами операции транспонирования):

$$(M - \mu_0 I)^T X = \mu_p - \mu_0.$$

Таким образом, придем к следующему представлению портфеля Тобина:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = X^T VX \to \min \\ (M - \mu_0 I)^T X = \mu_p - \mu_0 \end{cases},$$

что представляет собой задачу поиска условного экстремума функции: $X^T VX \to \min$ при выполнении условий, задаваемых уравнением: $(M - \mu_0 I)^T X = \mu_p - \mu_0$.

Решение может быть получено, используя метод множителей Лагранжа. Оно имеет вид:

$$X^* = \frac{\mu_p - \mu_0}{(M - \mu_0 I)^T V^{-1}(M - \mu_0 I)} \cdot V^{-1}(M - \mu_0 I),$$

где: V^{-1} - матрица, обратная ковариационной матрице V;

X^* - матрица (вектор-столбец), определяющий ценовые доли рисковых бумаг портфеля минимального риска (называемый портфелем Тобина минимального риска).

Ценовая доля безрисковых бумаг - x_0 определяется выражением:

$$x_0 = 1 - I^T X.$$

Значение риска портфеля Тобина может быть получено путем подстановки найденного значения вектора X^* в уравнение:

$$r_p = \sigma_p = \sqrt{D(d_p)} = \sqrt{X^T VX},$$

т.е:

$$r_p = \sigma_p = \sqrt{D(d_p)} = \sqrt{X^{*T} V X^*} \ .$$

Можно показать, что такая подстановка дает:

$$r_p = \sigma_p = \frac{\mu_p - \mu_0}{\sqrt{(M - \mu_0 I)^T V^{-1} (M - \mu_0 I)}}$$

Продемонстрируем, также, связь эффективности портфеля Тобина и его риска.

Эффективность портфеля оценивается суммой эффективностей его безрисковой и рисковой части:

$$\mu_p = x_0 \mu_0 + (1 - x_0)\mu_r ,$$

а его риск определяется только рисковой частью портфеля (предполагается, что безрисковые бумаги некоррелированы с его рисковой частью):

$$r_p = (1 - x_0) r_r \ .$$

Выразив из данного уравнения x_0:

$$x_0 = 1 - \frac{r_p}{r_r}$$

и подставив в уравнение эффективности портфеля, после преобразования, получим:

$$\mu_p = \mu_0 + r_p \frac{(\mu_r - \mu_0)}{r_r} ,$$

что отражает, в данном случае, линейную связь эффективности портфеля и его риска.

Портфель Марковица и портфель Тобина максимальной эффективности.

Выше рассмотрена задача формирования портфеля Марковица минимального риска. Рассмотрим теперь задачу формирования портфеля Марковица максимальной эффективности: $\mu_p \to \max$, при заданном значении риска - r_p . В этом случае, портфель будет описываться системой:

$$\begin{cases} \mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \to \max \\ \sigma_p = \sqrt{D(d_p)} = r_p \\ D(d_p) = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases},$$

или (объединяя 2-ое и третье уравнения):

$$\begin{cases} \mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \to \max \\ \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_p^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases},$$

что в матричной форме записывается как:

$$\begin{cases} \mu_p = M^T X \to \max \\ X^T V X = r_p^2 \\ I^T X = 1 \end{cases}$$

Портфель Тобина максимальной эффективности при заданном значении риска формируется с учетом наличия на рынке «безрисковых бумаг» и описывается системой:

$$\begin{cases} \mu_p = x_0 \mu_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \to \max \\ \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_p^2 \\ x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases},$$

которая в матричной форме примет вид:

$$\begin{cases} \mu_p = x_0 \mu_0 + M^T X \to \max \\ X^T V X = r_p^2 \\ x_0 + I^T X = 1 \end{cases},$$

Решение, также как и в случае минимального риска, может быть получено, используя метод множителей Лагранжа.

Запишем функцию Лагранжа - L:

$$L = x_0\mu_0 + M^T X + \lambda_0\left(X^T V X - r_p^2\right) + \lambda_1\left(x_0 + I^T X - 1\right).$$

Приравнивая частные производные функции Лагранжа по X и x_0 к нулю, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M^T + \lambda_0 X^T V + \lambda_1 I^T = 0 \\ \mu_0 + \lambda_1 = 0 \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения λ_1:

$$\lambda_1 = -\mu_0$$

и подставив в первое уравнение, получим:

$$M^T - \mu_0 I^T = -\lambda_0 X^T V,$$

или:

$$X^T = -\frac{1}{\lambda_0}\left(M^T - \mu_0 I^T\right) V^{-1}.$$

Применив операцию транспонирования к обеим частям равенства, используя свойства этой операции: $\left(A \pm B\right)^T = A^T \pm B^T$ и $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$), а также свойство симметрии ковариационной матрицы относительно главной диагонали, найдем:

$$X = -\frac{1}{\lambda_0} V^{-1}\left(M - \mu_0 I\right).$$

Выразим λ_0, подставив выражения X^T и X в формулу квадрата риска $X^T V X = r_p^2$:

$$\left[-\frac{1}{\lambda_0}\left(M^T - \mu_0 I^T\right) V^{-1}\right] V \left[-\frac{1}{\lambda_0} V^{-1}\left(M - \mu_0 I\right)\right] = r_p^2,$$

или:

$$r_p^2 = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 \left(M^T - \mu_0 I^T\right) V^{-1}\left(M - \mu_0 I\right),$$

откуда:

$$-\frac{1}{\lambda_0} = \frac{r_p}{\sqrt{\left(M^T - \mu_0 I^T\right) V^{-1}\left(M - \mu_0 I\right)}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для X, и обозначая найденное значение как X^*, окончательно получим:

$$X^* = \frac{r_p}{\sqrt{(M-\mu_0 I)^T V^{-1}(M-\mu_0 I)}} \cdot V^{-1}(M-\mu_0 I),$$

где: V^{-1} - матрица, обратная ковариационной матрице V;

X^* - вектор-столбец, определяющий ценовые доли рисковых бумаг портфеля максимальной эффективности, включающего и безрисковые активы.

Описанный случай оптимизации эффективности портфеля, содержащего рисковые и безрисковые активы, получил название ***портфель Тобина максимальной эффективности.***

ЗАМЕЧАНИЕ. Как правило, инвесторы специализируются внутри отдельных областей, и создают специализированные портфели, используя ценные бумаги отдельно взятых отраслей.

Тема 8. Оптимальные неотрицательные портфели.

Основные вопросы темы

1. Доходность неотрицательного портфеля. Теорема Куна-Таккера.
2. Портфель максимальной эффективности и портфель минимального риска с неотрицательными компонентами.
3. Диверсификация портфеля.

8.1 Доходность неотрицательного портфеля.

Рассмотрим портфель, для которого вектор-столбец X, определяющий ценовые доли активов его составляющих, состоит из неотрицательных компонентов:

$$x_i \geq 0 \,|\, i = 1,\ldots,n.$$

Такой портфель называется ***неотрицательным.***

Этим свойством обладает, в частности, инвестиционный портфель, состоящий из ценных бумаг отраслей (фирм), в которые инвестор вкладывает свои средства.

Оценим эффективность μ_p неотрицательного портфеля.

Обозначим через $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$, соответственно, минимальное и максимальное значение эффективности ценных бумаг портфеля:

$$\mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n); \text{ и}$$

$$\mu_{\max} = \max(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n), \text{ т.е.:}$$

Учтем, что:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i .$$

Поскольку:

$$\mu_{\min} \leq \mu_i \leq \mu_{\max} \,|\, i = 1,\ldots,n;$$

$$x_i \geq 0 \,|\, i = 1,\ldots,n; \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

то:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{\max} = \mu_{\max} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu_{\max},$$

т.е.:

$$\mu_p \le \mu_{\max} .$$

Аналогично:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{\min} = \mu_{\min} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu_{\min} ,$$

т.е.:

$$\mu_p \ge \mu_{\min} .$$

Таким образом:

$$\mu_{\min} \le \mu_p \le \mu_{\max} ,$$

т.е. мы показали, что доходность неотрицательного портфеля не ниже минимальной и не выше максимальной доходности составляющих его бумаг.

Теорема Куна-Таккера.

Выше, при решении задач оптимизации портфеля, применялся метод множителей Лагранжа, позволяющий находить условный экстремум, используя функцию Лагранжа с учетом ограничений, заданных системой уравнений. Однако, для оптимизации неотрицательного портфеля, этот метод не может быть непосредственно применен, т.к. в рассматриваемом случае, ограничения заданы системой ***неравенств***:

$$x_i \ge 0 \,\big|\, i = 1, \ldots, n .$$

Решение задач такого рода рассматривается в специальном разделе математики, получившем название *нелинейного программирования.* Центральное место в этом разделе занимает теорема Куна-Таккера, которая связывает решение задачи нелинейного программирования с существованием седловой точки соответствующей функции Лагранжа. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема Куна-Таккера. Пусть функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на выпуклом множестве *M,* определяемым системой ограничений, заданных в форме уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0, & i = 1, 2, \ldots, l \\ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & j = l+1, l+2, \ldots, m \end{cases},$$

где: $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; и $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемые и вогнутые на множестве *M* функции.

Тогда, необходимым и достаточным условием существования глобального максимума функции $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области *M* является существование неотрицательного *m*–мерного вектора множителей Лагранжа $\vec{\lambda}$ соответствующей функции Лагранжа - $L(X,\vec{\lambda})$, удовлетворяющего условиям:

$$L'_{x_i}(X,\vec{\lambda}) = 0, \quad i = 1,\ldots,n;$$
$$\lambda_j \cdot g_j(X) = 0, \quad j = 1,\ldots,l;$$
$$\lambda_k \geq 0, \qquad k = 1,\ldots,l.$$

8.2 Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами

Неотрицательный портфель минимального риска описывается системой:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = X^T V X \to \min \\ I^T X = 1 \\ X > 0 \end{cases},$$

Пример. Найти неотрицательный портфель минимального риска, состоящий из двух независимых бумаг.

Решение. Запишем выражение для риска портфеля, учитывая, что он состоит только из двух независимых бумаг:

$$D(d_p) = \sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2,$$

Тогда, система примет вид:

$$\begin{cases} D(d_p) = \sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \to \min \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к поиску экстремума (минимума) функции риска (квадрата дисперсии) в условиях ограничений, заданных в форме уравнения и неравенств, а потому, может быть решена, опираясь на теорему Куна-Таккера. С этой целью, составим функцию Лагранжа:

$$L(X,\vec{\lambda}) = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$$

и найдем ее седловую точку, используя условия теоремы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ \lambda_1 x_1 = 0, \lambda_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Можно показать [1], что множество возможных решений этой системы графически представляется в виде отрезка прямой, соединяющей точки (0, 1) и (1, 0) на плоскости $x_1 - 0 - x_2$ (см. рисунок ниже).

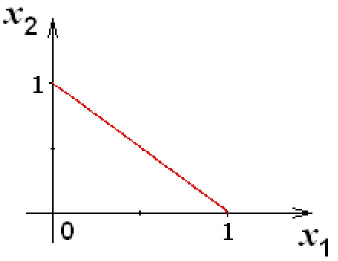


Рисунок. Иллюстрация к решению задачи построения неотрицательного оптимального портфеля

В общем случае, минимизация риска неотрицательного портфеля, содержащего большое количество ценных бумаг, представляет собой сложную задачу. Для небольшого числа бумаг, задача решается путем перебора различных вариантов.

Портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами

Неотрицательный портфель максимальной эффективности описывается системой:

$$\begin{cases} \vec{\mu} X \to \max \\ I^T X = 1 \\ X > 0 \end{cases},$$

Данная задача, также, относится к классу задач нелинейного программирования. Теоретически показано, что в этом случае только ***одна*** переменная $x_i \in X$ может быть отлична от нуля: $x_i \neq 0$. Из этого вытекает, что портфель максимальной эффективности должен содержать только один вид ценных бумаг, обладающих самой высокой эффективностью.

8.3 Диверсификация портфеля.

Одним из эффективных методов снижения портфельного риска является диверсификация его активов. Сам термин *диверсификация* проходит от двух латинских слов: *di-versus* - разный + *facere* - делать. В практике портфельных инвестиций широко применяется термин *diversification of investments* (англ.), что означает распределение капиталовложений между различными видами ценных бумаг. В русском языке ему соответствует образное и емкое выражение “*не класть все яйца в одну корзину*”.

Однако, правильное формирование портфеля связано не только с вложением средств в разные типы ценных бумаг, но и их выборе, отдавая предпочтение тем, изменения цен которых слабо связаны (слабо коррелированы) между собой. Оптимально - если динамика изменения их цен - разнонаправлена (имеет место отрицательная корреляция). Тогда падение цен одних бумаг компенсируется ростом цен других.

Приведем пример такой отрицательной корреляции, демонстрирующий полезность диверсификации[12].

Инвестор формирует портфель, вкладывая поровну денежные средства в акции двух фирм, одна из которых производит солнцезащитные очки, а вторая — зонты от дождя. Эффективность каждого типа вложений существенно зависит от погодных условий: в дождливую погоду эффективность вложений в фирму, производящую солнцезащитные очки – резко снижается, в противоположность фирмы, производящей зонты. И наоборот. Конкретные значения приведены в таблице ниже. Последний столбец таблицы содержит данные расчета портфельных инвестиций, используя формулу:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i .$$

Таблица. Пример оценки портфельных инвестиций

Условия погоды	Эффективность акций фирмы «Очки», μ_1 %	Эффективность акций фирмы «Зонты», μ_2 %	Эффективность портфеля акций $\mu_p = 0{,}5\mu_1 + 0{,}5\mu_2$
Дождливая	0	20	10
Нормальная	10	10	10
Солнечная	20	0	10

12 Пример заимствован из работы «Портфель ценных бумаг» http://www.grandars.ru/student/finansy/portfel-cennyh-bumag.html#a2

В заключение отметим, что для значительных объемах портфельных инвестиций, международная практика рекомендует ограничивать вложения в каждый вид ценных бумаг не превышающих 10% от суммарной стоимости портфеля.

Тема 9. Облигации.

Основные вопросы темы

1. Облигации, основные понятия.
2. Текущая стоимость облигации.
3. Текущая доходность и доходность к погашению.
4. Дополнительные характеристики облигации.

9.1 Облигации. Основные понятия.

Слово облигация происходит от латинского слова *obligatio*, что переводится как обязательство. Само это понятие означает особый вид долговой ценной бумаги, свидетельствующей о том, что ее владелец предоставил эмитенту заем (на долгосрочной или краткосрочной основе), равный номинальной стоимости облигации. Выпуская эти бумаги, эмитент обязуется погасить долг в указанный срок (возможно, с процентами).

Как правило, доход, гарантируемый облигациями, ниже, чем доход иных ценных бумаг, однако, их надежность существенно выше[13]. Доход обладателя облигации складывается из суммы выплачиваемых процентов, возможного дисконта при ее приобретении, и, как правило, обладает большей стабильностью, независящей от колебаний рынка.

Выпуск облигаций, во многих случаях, производится государством при необходимости привлечения дополнительных средств, для реализации крупномасштабных программ и проектов. В качестве примера, укажем на выпущенные в СССР (см. приложение):

- облигации Государственного военного займа;
- облигации Государственного займа восстановления народного хозяйства;
- облигации государственного займа развития народного хозяйства СССР; и др.

В США имеют хождение облигации:

- *treasury bills* — краткосрочные бескупонные казначейские обязательства;
- *treasury notes* — казначейские процентные облигации со сроком обращения от 1 до 9 лет;
- *treasury bonds* — процентные облигации со сроком обращения свыше 10 лет; и др.

В Японии практикуется выпуск облигаций для финансирования крупных строительных проектов.

[13] В случае экономического или финансового кризиса, надежность облигаций, также может быть не высока.

Одна из разновидностей облигаций – так называемые, купонные (процентные) облигации, имеющие отрезные купоны по которым выплачиваются проценты (откуда и произошла фраза «*стричь купоны*»).

Виды облигаций

Традиционно, облигации классифицируют, используя один из признаков, их характеризующих. В частности:

- эмитент;
- тип дохода;
- конвертируемость;
- цель выпуска;
- рейтинг; и др.

Рассмотрим некоторые из них.

С точки зрения эмитента, облигации подразделяются на:

- государственные (*government bonds*), гарантированные правительством;
- муниципальные (*municipal bonds*); и
- корпоративные (с*orporate bonds*).

По типу дохода облигации подразделяются на:

- ***дисконтные*** (*zero coupon bond*) – ***бескупонные*** (беспроцентные) облигации, доход которых определяется дисконтом при их приобретении (т.е. продаже по цене ниже номинальной стоимости). Соответственно, при приближении срока погашения, размер дисконта снижается, а рыночная цена – увеличивается[14] (примером дисконтных облигаций могут служить ГКО);
- **облигации с *фиксированной процентной ставкой*** по купонам (*fixed rate bond*). Примером могут служить Облигации Федерального Займа – ОФЗ, выпускаемые банком России, большая часть еврооблигаций и др.;
- ***облигации с плавающей процентной ставкой*** по купонам (*floating rate bond*). В этом случае размер купонной процентной ставки зависит от текущих макроэкономических показателей, ставок межбанковских кредитов, доходности иных государственных ценных бумаг, либо иных показателей.

[14] Стоимость дисконтной облигации, как правило, меньше ее номинальной стоимости. Исключения составляют случаи, когда погашение производится не деньгами, а некоторым активом, цена которого выше номинальной стоимости облигации.

9.2 Текущая стоимость облигации.

Текущая стоимость облигации зависит от ее типа и не является постоянной величиной.

Текущая стоимость – $P_{тек}$ дисконтной бескупонной облигации (*zero coupon bond*), номинальной стоимостью N определяется выражением:

$$P_{тек} = \frac{N}{(1+R)^n} = N \cdot (1+R)^{-n},$$

где: n – число временных периодов оставшихся до даты погашения;

R – ставка дисконтирования (ставка альтернативных вложений) на один временной период.

При расчете будущей стоимости – P_T дисконтной облигации целесообразно воспользоваться аналогичной формулой:

$$P_T = P_{тек} \cdot (1+R)^T,$$

где: T – время, измеряемое количеством временных периодов, до даты, на которую проводится расчет будущей стоимости.

Пример. Номинальная стоимость дисконтной бескупонной облигации составляет 1000 ден. ед. Рассчитать ее текущую стоимость, если ставка дисконтирования составляет 20% в год, если срок до даты погашения составляет 5 лет.

Решение. В данном случае: $N = 1000$; R=0,2; n=5. Подставляя эти значения в формулу, получим:

$$P_{тек} = N \cdot (1+R)^{-n} = 1000(1+0{,}2)^{-5} = 401{,}878 \text{ ден. ед.}$$

Выполним (для проверки) расчет будущей стоимости дисконтной облигации через 5 лет, если ее текущая стоимость составляет 401,878 ден. ед., при ставке дисконтирования 20 % :

$$P_T = P_{тек} \cdot (1+R)^T = 401{,}878 \cdot 1{,}2^5 = 1000 \text{ ден. ед.}$$

Для расчета текущей стоимости – $P_{тек}$ дисконтной облигации с купонными выплатами приведенные формулы должны быть модифицированы с учетом величины процентных выплат по купонам:

$$P_{тек} = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+R)^k} + \frac{N}{(1+R)^n},$$

где: c – ***купонная ставка*** (называемая, также, ***нормой дохода***), определяемая как отношение суммы купонных платежей за год – C к номинальной стоимости облигации – N:

$$c = \frac{C}{N}\ .$$

Учтя, что первое слагаемое представляет сумму членов геометрической прогрессии (с точностью до множителя cN) с первым членом $a_1 = \frac{1}{(1+R)}$ и $q = \frac{1}{(1+R)}$ и применяя соответствующую формулу суммирования, получим:

$$P_{mek} = \tilde{n}N\frac{1-(1+R)^{-n}}{R} + N\cdot(1+R)^{-n}\ .$$

Пример. Используя данные предыдущей задачи, определить текущую стоимость облигации, если размер купонной ставки составляет 15%.

Решение. Согласно условию задачи, c=0,15. Подставляя, получим:

$$P_{mek} = \tilde{n}N\frac{1-(1+R)^{-n}}{R} + N\cdot(1+R)^{-n} = 0{,}15\cdot 1000\cdot\frac{1-1{,}2^{-5}}{0{,}2} + 1000\cdot 1{,}2^{-5} = 850{,}47$$ ден. ед.

ЗАМЕЧАНИЕ. В реальной финансовой практике, дополнительно к приведенным формулам используются специальные методики, позволяющие определить текущую стоимость облигации на произвольную дату расчета. К ним относятся:
- ISMA yield - метод, рекомендуемый международной организацией International Security Management Association – ISMA;
- IRR yield - метод, используемый ММВБ. Отличается от *ISMA yield* тем, что не учитывается частота купонных выплат;
- ISMA yield (adjusted) - метод расчета полностью соответствует типу *IRR yield* за исключением того, что при расчете денежных потоков не учитываются праздничные дни; а также, другие методики.

9.3 Текущая доходность облигации.

Рынок облигаций

Несмотря на сравнительно невысокую доходность облигаций, они являются востребованным видом ценных бумаг. Их привлекательность определяется важными для инвестора факторами: заранее известным и фиксированным временем обращения на рынке; заранее известной и фиксированной процентной ставкой по купонам; заранее определенным моментом и размером (ценой) погашения облигации. Это позволяет точно определять (прогнозировать) размер будущей прибыли, снижать риски инвестирования по сравнению с возможно более доходными, но и более рискованными видами ценных бумаг, доход которых трудно прогнозировать на длительный срок.

Обращение облигаций на вторичном рынке ценных бумаг формирует их текущую рыночную стоимость под влиянием различных факторов. Одним из них является размер банковских депозитных ставок. Учитывая, что надежность банковских депозитов весьма высока и прогнозируема, они могут стать привлекательными для инвестора. Однако, и в этом случае, ситуация не является однозначной. Дело в том, что более высокий размер банковских депозитных ставок, как правило, ассоциируется с более длительным сроком вклада. И в этом случае, облигации начинают выигрывать, поскольку обладают высокой ликвидностью.

Если цена выше номинальной стоимости, то говорят, что облигация продаётся с ***премией*** (с ***ажио*** */agio* (лат.) — превышение). Если по цене ниже номинала — то с ***дисконтом*** (с ***дизажио*** / *disagio* (лат.) — скидка).

С целью сопоставления различных облигаций на вторичном рынке ценных бумаг, используется показатель - ***i***, называемый ***текущей доходностью облигации***, который определяется как отношение суммы купонных платежей за год – C, к текущей рыночной стоимости облигации (цене ее приобретения) – V :

$$i = \frac{C}{V}.$$

Таким образом, *текущая доходность* отражает получаемый годовой доход облигации по купонам на вложенный капитал (на момент ее приобретения). Этот показатель может быть использован, например, при выборе с целью покупки, сравнивая текущую доходность различных облигаций, имеющихся на рынке.

Если купонные выплаты осуществляются раз в год, то:

$$C = c \cdot N$$

и формула текущей доходности примет вид:

$$i = \frac{cN}{V}.$$

Однако, если купонные платежи производятся p раз в год по процентной ставке $\frac{c}{p}$, то, и в этом случае, формула текущей доходности остается неизменной:

$$i = \frac{\frac{c}{p} N \cdot p}{V} = \frac{cN}{V}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Текущую доходность часто выражают в процентах. В этом случае, формула примет вид:

$$i = \frac{cN}{V} \cdot 100\% .$$

Пример. Рассчитать текущую доходность облигации (в процентах) номинальной стоимостью 1000 ден. ед., ставкой купона 5% и рыночной стоимостью 950 ден. ед.

Решение. Согласно условию задачи, c=0,05. Подставляя заданные значения в формулу текущей доходности, получим:

$$i = \frac{0{,}05 \cdot 1000}{950} \cdot 100\% = \frac{5}{95} \cdot 100\% = 5{,}2631\% .$$

Доходность к погашению.

Показатель текущей доходности является неполным, т.к. отражает лишь доход по купонам на вложенный капитал и не включает стоимость ее погашения. Поставим задачу учесть оба эти фактора и определить: каково должно быть реальное значение процентной ставки – ρ, которое будет соответствовать рыночной стоимости облигации – V (которое может не совпадать с ее текущей стоимостью - $P_{\text{тек}}$).

Значение ρ, удовлетворяющее поставленной задачи называется ***доходностью к погашению***.

По аналогии с формулой текущей стоимости, запишем:

$$V = \tilde{n}N \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N \cdot (1+\rho)^{-n}.$$

Это уравнение определяет доходность к погашению – ρ в неявной форме. Его решение существует и единственно.

Само решение находится с применением численных методов, с помощью которых, в частности, можно получить следующую приближенную формулу:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)},$$

где: K – ***курс облигации***, вычисляемый по формуле: $K = \frac{V}{N}$.

Можно показать, что рыночная цена облигации и доходность к погашению связаны следующими свойствами:

1. Рыночная цена совпадает с номинальной стоимостью тогда и только тогда, когда доходность к погашению совпадает с величиной купонной ставки;
2. Рыночная цена превышает номинальную стоимость тогда и только тогда, когда доходность к погашению меньше величины купонной ставки;
3. Рыночная цена меньше номинальной стоимости облигации тогда и только тогда, когда доходность к погашению превышает величину купонной ставки.

9.4 Дополнительные характеристики облигации.

В качестве дополнительных характеристик облигации в литературе упоминаются: *средний срок поступления дохода*; *дюрация облигации*; и *выпуклость облигации*.

Средний срок поступления дохода – T определяется посредством средней взвешенной величины распределенных во времени поступлений доходов от облигации:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i},$$

где: S_i – величина i-го дохода;

t_i – срок поступления i-го дохода;

n – срок облигации (при годовых выплатах, равный числу купонных выплат).

Учтя купонные выплаты и номинальную стоимость погашения – N в конце срока, запишем выражения для числителя и знаменателя дроби:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = cNn + N; \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i S_i = cN\sum_{i=1}^{n} t_i + nN.$$

Подставляя, получим:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} = \frac{cN\sum_{i=1}^{n} t_i + nN}{cNn + N} = \frac{c\sum_{i=1}^{n} t_i + n}{cn + 1}.$$

Для ежегодных купонных выплат, $t_i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае, выражение, определяемое знаком суммы, представляет собой сумму членов арифметической прогрессии:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Окончательно получим:

$$T = \frac{c\sum_{i=1}^{n} t_i + n}{cn + 1} = \frac{\tilde{n}\frac{(1+n)n}{2} + n}{cn + 1} = \frac{\tilde{n}\frac{(1+n)}{2} + 1}{c + n^{-1}}.$$

Если купонные выплаты производятся несколько раз в год с кратностью p, то общее число выплат будет равно np, временной ряд последовательных выплат примет вид:

$$t_i = \frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \frac{3}{p},\ \ldots\ , n,$$

а его сумма равна:

$$\sum_{i=1}^{np} t_i = \frac{1}{p} + \frac{2}{p} + \frac{3}{p} + \ldots + n = \frac{(p^{-1} + n)np}{2}.$$

Подставляя в формулу среднего срока поступления дохода, после преобразования, получим:

$$T = \frac{\tilde{n}p^{-1}(p^{-1} + n) + 1}{c + n^{-1}}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что увеличение кратности выплат снижает средний срок поступления дохода (что и следовало ожидать).

Отметим, что снижение среднего срока поступления дохода снижает риски инвестора.

Дюрация облигации.

Термин ***дюрация*** происходит от английского слова *duration* (длительность, продолжительность) и введен в 1938 году американским экономистом Ф. Маколи (*Frederick R. Macauley*). Он продемонстрировал преимущества использования этого показателя.

Маколи определял дюрацию облигации как «*средний взвешенный срок погашения денежных потоков облигации, где “весами” служат приведенные стоимости этих потоков денег*».

Дюрация облигации является частным случаем ***дюрации потока платежей*** – D, которая определяется *средний взвешенный срок платежей, где “весами” служат их приведенные стоимости*:

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i w_i \ ,$$

где: $t_i = 1, 2, \ldots, n$ – сроки погашения платежей;

w_i – весовые коэффициенты, определяемые приведенной стоимостью платежей (см. ниже).

Для определения значений весовых коэффициентов w_i , рассмотрим поток платежей:

$$\{(t_1, R_1),\ (t_2, R_2),\ (t_3, R_3),\ \ldots\ (t_n, R_n)\},$$

текущая стоимость которого – P , с учетом процентной ставки y, составляет:

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} R_i (1+y)^{-t_i} \ .$$

Весовые коэффициенты – w_i , определяемые приведенной стоимостью платежей, соответственно, равны отношению величины i-го платежа (с учетом процентной ставки – y) к текущей стоимости потока:

$$w_i = \frac{R_i (1+y)^{-t_i}}{P(y)} = \frac{R_i (1+y)^{-t_i}}{\sum_{i=1}^{n} R_i (1+y)^{-t_i}} \ .$$

Отметим, что:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 .$$

Наряду с понятием дюрации, используется понятие модифицированной дюрации – MD, которая (сточностью до знака) определяется как темп изменения текущей стоимости потока по отношению к процентной ставке, и вычисляется как отношение производной функции $P'(y)$ к текущей стоимости – $P(y)$:

$$MD = -\frac{P'(y)}{P(y)},$$

что после выполнения операции дифференцирования и соответствующих преобразований дает:

$$MD = \frac{1}{1+y}\sum_{i=1}^{n} w_i t_i ,$$

или:

$$MD = \frac{1}{1+y} D .$$

Если выплаты производятся несколько раз в год с кратностью p, то формула модифицированной дюрации примет вид:

$$MD = \frac{1}{1+y\cdot p^{-1}} D .$$

Пример. Найти дюрацию потока платежей:

$$\{(1;100),\ (2;200),\ (3,300),\ (4,400)\},$$

при величине процентной ставки y=10% .

Решение:

Найдем текущую стоимость потока:

$$P = 100\cdot(1+0{,}1)^{-1} + 200\cdot(1+0{,}1)^{-2} + 300\cdot(1+0{,}1)^{-3} + 400\cdot(1+0{,}1)^{-4} = 754{,}798 .$$

Вычислим значения весовых коэффициентов:

$$w_1 = \frac{100\cdot(1+0.1)^{-1}}{754{,}798} = 0{,}12; \quad w_2 = \frac{200\cdot(1+0.1)^{-2}}{754{,}798} = 0{,}219;$$

$$w_3 = \frac{300\cdot(1+0.1)^{-3}}{754{,}798} = 0{,}299; \quad w_4 = \frac{400\cdot(1+0.1)^{-4}}{754{,}798} = 0{,}362.$$

Проверим соблюдение свойства $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$:

$$0{,}12 + 0{,}219 + 0{,}299 + 0{,}362 = 1$$

Найдем значение дюрации потока платежей:

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i w_i = 1\cdot 0{,}12 + 2\cdot 0.219 + 3\cdot 0{,}299 + 4\cdot 0{,}362 = 2{,}903 .$$

Для облигации поток платежей определяется как:

$$\{(1,\tilde{n}N),\ (2,cN),\ (3,cN),\ \ldots,\ (n,cN+N)\}.$$

Рассмотренные выше свойства дюрации потока платежей распространяются и на дюрацию облигации. В частности:

1. Дюрация бескупонной облигации совпадает со сроком ее погашения.

2. Дюрация облигации с купонными выплатами меньше срока ее погашения;

3. Дюрация облигации убывает с ростом процентной ставки;

Модифицированная дюрация – *MD* облигации определяет чувствительность ее цены к изменению доходности. В частности, относительное изменение рыночной цены облигации - $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении доходности на Δy может быть оценено по формуле:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx MD \cdot \Delta y = \frac{D}{1+y} \cdot \Delta y .$$

Эта формула является приблизительной. Более точное значение относительного изменения рыночной цены облигации можно получить, используя понятие выпуклости облигации – $W(y)$, которое определяется посредством второй производной функции $V(y)$:

$$W(y) = \frac{V''(y)}{V(y)}(1+y)^2 .$$

Можно показать, что более точная оценка относительного изменения цены облигации дается выражением:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{D}{1+y} \cdot \Delta y + \frac{1}{2} W \cdot (\Delta y)^2 .$$

Смысловым содержанием модифицированной дюрации облигации является эластичность функции ее рыночной цены по величине процентной ставки (ставки дисконтирования). Иными словами, модифицированная дюрация отражает величину изменения рыночной цены облигации при изменении процентной ставки (ставки дисконтирования) на 1 %.

При неустойчивой ситуации на рынке ценных бумаг, сравнительно небольшие изменения процентной ставки могут приводить к значительным изменениям рыночной стоимости бумаг, а следовательно и более высоким рискам, что и будет отражать соответствующее значение модифицированной дюрации.

Тема 10. Портфель облигаций.

Основные вопросы темы

1. Портфель облигаций.
2. Иммунизация портфеля облигаций.
3. Основные характеристики портфеля облигаций.

10.1 Портфель облигаций.

Портфель облигаций является частным (и специфическим) случаем портфеля ценных бумаг. Он состоит из совокупности пакетов облигаций федеральных и частных компаний, различающихся номинальной стоимостью, сроками погашений, величиной купонных ставок и др. Целью создания такого портфеля является защита денежных средств от инфляционных рисков, обеспечивая доходность не ниже депозитных вложений.

10.2 Иммунизация портфеля облигаций

В качестве примера, приведем данные инвестиционной компании, реализующей активное управление портфелем облигаций[15].

Сравнительные данные 2012 года		
Уровень инфляции (по данным Росстата)	Результат управления портфелем	Средняя максимальная ставка по вкладам TOP-10 банков
6,6%	9-12,5% годовых	6,72%

Как следует из приведенной таблицы, результат активного управления портфелем облигаций выразился в достижении высоких показателей рентабельности на протяжении некоторого периода, вне зависимости от уровня инфляции. Такое управление получило ***название иммунизацией портфеля облигаций***.

Достигнутые показатели даже превысили среднюю максимальную ставку для депозитных вложений десяти TOP – банков.

Покажем на примере как реализуется такой процесс управления, используя метод иммунизации портфеля облигаций.

Пусть рассматривается вопрос приобретения бескупонной, n-годичной, процентной облигации, номинальной стоимостью N и сроком погашения t при годовой процентной ставке r. Текущая стоимость – P такой облигации составит:

$$P = \frac{N}{(1+r)^t}.$$

[15] Велес Капитал. Активное управление пакетом ценных облигаций.
Источник: http://www.veles-capital.ru/ru/Services/AssetManagement/BondPortfolio

Приобретение такой облигации связано с инфляционными рисками, приводящими к изменению процентной ставки. Самюэльсон[16] показал возможность снижения риска путем замены этой облигации двумя другими (т.е. портфелем облигаций), номинальной стоимостью N_1 и N_2 и сроками погашения t_1 и t_2 - соответственно, где:

$$t_1 < t < t_2.$$

Тогда, текущая стоимость портфеля - P_Σ определяется суммой текущей стоимости обеих облигаций:

$$P_\Sigma = \frac{N_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{N_2}{(1+r)^{t_2}}.$$

Облигации выбираются таким образом, чтобы при заданной процентной ставке $r = r_0$ портфель и замещаемая им одиночная облигация обеспечивали эквивалентность денежных потоков и дюраций:

$$\begin{cases} P(r_0) = P_\Sigma(r_0) \\ D(r_0) = D_\Sigma(r_0) \end{cases},$$

а при изменении процентной ставки, текущая стоимость портфеля была выше:

$$P_\Sigma(r) > P(r).$$

Условием равенства:

$$P_\Sigma(r) = P(r)$$

при изменении значения r, является одинаковая скорость роста стоимости облигации и портфеля. Однако, если скорость роста стоимости портфеля выше скорости роста одиночной облигации, то это обеспечит и большую его доходность. Скорость роста (ускорение) определяется второй производной. Вычисляя ее значение для $P(r)$ и $P_\Sigma(r)$, после соответствующих преобразований, найдем, что:

$$P''(r) = \frac{P}{(1+r)^2}\left(\frac{N}{P(1+r)^t}t^2 + D\right) \text{ и}$$

$$P_\Sigma''(r) = \frac{P_2}{(1+r)^2}\left(\frac{N_1}{P_1(1+r)^{t_1}}t_1^2 + \frac{N_2}{P_2(1+r)^{t_2}}t_2^2 + D_\Sigma\right).$$

Учитывая начальные условия: $P_\Sigma(r_0) = P(r_0)$ и $D_\Sigma(r_0) = D(r_0)$, получим, что:

[16] Пол Самюэльсон – выдающийся американский экономист, лауреат нобелевской премии. Ему принадлежит, в частности, следующее высказывание: «Я считаю, что нужно уделять гораздо больше внимания изучению экономической истории, потому что она представляет собой материал для проведения любых исследований и построения ваших собственных гипотез»

$$P_\Sigma''(r) > P''(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{P_1(1+r)^{t_1}} t_1^2 + \frac{N_2}{P_2(1+r)^{t_2}} t_2^2 > \frac{N}{P(1+r)^t} t^2,$$

или:

$$w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 > w t^2,$$

где весовые коэффициенты: w_1, w_2 и w определяются формулами:

$$w_1 = \frac{N_1}{P_1(1+r)^{t_1}}; \quad w_2 = \frac{N_2}{P_2(1+r)^{t2}}; \quad w = \frac{N}{P(1+r)^t};$$

и

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Другое начальное условие - равенство $D_\Sigma(r_0) = D(r_0)$ приводит, в свою очередь, к:

$$w_1 t_1 + w_2 t_2 = t.$$

Соблюдение условий:

$$\begin{cases} w_1 t_1 + w_2 t_2 = t \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

приводит к тому, что созданный портфель обладает свойством иммунизации по отношению к одиночной облигации.

Для иллюстрации, приведем пример, заимствованный из /1/.

Пример. Построить иммунизированный портфель из трех- и пятигодичной облигаций, по отношению к четырехгодичной облигации, номинальной стоимости 3000 у.е., при процентной ставке 15%.

Решение. Определим текущую стоимость одиночной облигации:

$$P = \frac{N}{(1+r)^t} = \frac{3000}{(1+0{,}15)^4} = 1715{,}26 \text{ у.е.}$$

Запишем условие иммунизации портфеля:

$$\begin{cases} 3w_1 + 5w_2 = 4 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}.$$

Решение этой системы дает:

$$w_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad w_2 = \frac{1}{2}.$$

Определим текущую стоимость облигаций портфеля с учетом весовых коэффициентов:

$$P_1 = \frac{1}{2} P = 857{,}63 \text{ у.е.} \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{1}{2} P = 857{,}63 \text{ у.е.}$$

Далее вычислим их номинальную стоимость:

$$N_1 = P_1(1+r)^{t_1} = 857{,}63 \cdot (1+0{,}15)^3 = 1304{,}35 \text{ у.е., и}$$

$$N_2 = P_2(1+r)^{t_2} = 857{,}63 \cdot (1+0{,}15)^5 = 1725 \text{ у.е.}$$

Таким образом, для создания иммунизирующего портфеля необходимо приобрести трехгодичную облигацию номинальной стоимости 1304, 35 у.е. и пятигодичную облигацию, номинальной стоимости 1725 у.е.

10.3 Основные характеристики портфеля облигаций.

В качестве суммарных характеристик портфеля используются: доходность, средний срок поступления дохода, дюрацию, выпуклость и др. Приведем математические выражения для вычисления этих величин.

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций – T_Σ определяется средневзвешенная величина, где в качестве весов используются стоимости облигаций:

$$T_\Sigma = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k},$$

где: T_k – средний срок поступления дохода облигации вида k;
q_k – число облигаций данного вида.

Дюрация портфеля облигаций – D_Σ вычисляется как средневзвешенная дюраций отдельных облигаций – D_k с весами, равными стоимости облигаций:

$$D_\Sigma = \frac{\sum_k D_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}.$$

Выпуклость портфеля облигаций – $\tilde{N}_\Sigma$ вычисляется как средневзвешенная выпуклость отдельных облигаций – $\tilde{N}_k$ с весами, равными стоимости облигаций:

$$\tilde{N}_\Sigma = \frac{\sum_k \tilde{N}_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}.$$

Приложение. Порядковые номера дней в году

День месяца	Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312.	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344'
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Приложение 2 Множители наращения по сложным процентам

Число периодов n	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	,020000	,050000	,070000	,090000	,100000	,110000
2	,040400	,102500	,144900	,188100	,210000	,232100
3	,061208	,157625	,225043	,295029	,331000	,367631
4	,082432	,215506	,310796	,411582	.464100	,518070
5	,104081	,276282	,402552	,538624	,610510	,685058
6	,126162	,340096	,500730	,677100	,771561	,870415
7	,148686	,407100	,605781	,828039	,948717	2,076160
8	,171659	,477455	,718186	,992563	2,143589	2,304538
9	,195093	,551328	,838459	2,171893	2,357948	2,558037
10	,218994	,628895	,967151	2,367364	2,593742	2,839421
11	,243374	,710339	2,104852	2,580426	2,853117	3,151757
12	,268242	,795856	2,252192	2,812665	3,138428	3,498451
13	,293607	,885649	2,409845	3,065805	3,452271	3,883280
14	,319479	,979932	2,578534	3,341727	3,797498	4,310441
15	,345868	2,078928	2,759032	3,642482	4,177248	4,784589
16	,372786	2,182875	2,952164	3,970306	4,594973	5,310894
17	,400241	2,292018	3,158815	4,327633	5,054470	5,895093
18	,428246	2,406619	3,379932	4,717120	5,559917	6,543553
19	,456811	2,526950	3,616528	5,141661	6,115909	7,263344
20	,485947	2,653298	3,869684	5,604411	6,727500	8,062312
21	,515666	2,785963	4,140562	6,108808	7,400250	8,949166
22	,545980	2,925261	4,430402	6,658600	8,140275	9,933574
23	,576899	3,071524	4,740530	7,257874	8,954302	11,02626
24	,608437	3,225100	5,072367	7,911083	9,849733	12,23915
25	,640606	3,386355	5,427433	8,623081	10,83470	13,58546
26	,673418	3,555673	5,807353	9,399158	11,91817	15,07986
27	,706886	3,733456	6,213868	10,24508	13,10999	16,73865
28	,741024	3,920129	6,648838	11,16714	14,42099	18,57990
29	,775845	4,116136	7,114257	12,17218	15,86309	20,62369
30	,811362	4,321942	7,612255	13,26767	17,44940	22,89229
35	,999890	5,516015	10,67658	20,41396	28,10243	38,57485
40	2,208040	7,039989	14,97445	31,40942	45,25925	65,00086
45	2,437854	8,985008	21,00245	48,32728	72,89048	109,5302
50	2,691588	11,46740	29,45702	74,35752	117,3908	184,5648

Приложение 2(продолжение таблицы).

Число периодов п	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,130000	1,150000	1,180000	1,200000	1,220000	1 ,250000
2	1,276900	1,322500	1,392400	1 ,440000	1 ,488400	1,562500
3	1,442897	1,520875	1 ,643032	1,728000	1,815848	1,953125
4	1,630474	1,749006	1,938778	2,073600	2,215335	2,441406
5	1,842435	2,011357	2,287758	2,488320	2,702708	3,051758
6	2,081952	2,313061	2,699554	2,985984	3,297304	3,814697
7	2,352605	2,660020	3,185474	3,583181	4,022711	4,768372
8	2,658444	3,059023	3,758859	4,299817	4,907707	5,960464
9	3,004042	3,517876	4,435454	5,159780	5,987403	7,450581
10	3,394567	4.045558	5,233836	6,191736	7,304631	9,313226
II	3,835861	4,652391	6,175926	7,430084	8,911650	11,641532
12	4,334523	5,350250	7,287593	8,916100	10,872213	14,551915'
13	4,898011	6,152788	8,599359	10,699321	13,264100	18,189894
14	5,534753	7,075706	10,147244	12,839185	16,182202	22,737368
15	6,254270	8,137062	' 11,973748	15,407022	19,742287	28,421709
16	7,067326	9,357621	14,129023	18,488426	24,085590	35,527137
17	7,986078	10,761264	16,672247	22,186111	29,384420	44,408921
IS	9,024268	12,375454	19,673251	26,623333	35,848992	55,511151
19	10,197423	14,231772	23,214436	31,948000	43,735771	69,388939
20	11,523088	16,366537	27~,393035	38,337600	53,357640	86,736174
21	13,021089	18,821518	32,323781	46,005120	65,096321	108,420217
22	14,713831	21,644746	38,142061	55,206144	79,417512	135,525272
23	16,626629	24,891458	45,007632	66,247373	96,889364	169,406589
24	18,788091	28,625176	53,109006	79,496847	118,205024	211,758237
25	21,230542	32,918953	62,668627	95,396217	144,210130	264,697796
26	23,990513	37,856796	73,948980	114,475460	175,936358	330,872245
27	27,109279	43,535315	87,259797	137,370552	214,642357	413,590306
28	30,633486	50,065612	102,966560	164,844662	261,863675	516,987883
29	34,615839	57,575454	121,500541	197,813595	319,473684	646,234854
30	39,115898	66,211772	143,370638	237,376314	389,757894	807,793567
35	72,068506	133,175523	327,997290	590,668229	1053,401842	2465,190329
40	132,781552	267,863546	750,378345	1469,771568	2847,037759	7523,163845
45	244,641402	538,769269	1716,683879	3657,261988	7694,712191	22958,87404
50	450,735925	1083,657442	3927,356860	9100,438150	20796,56145	70064,92322

Приложение 3 Дисконтные множители по сложным процентам.

Число периодов n	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,900901
2	0,961169	0,907029	0,873439	0,841680	0,826446	0,811622
3	0,942322	0,863838	0,816298	0,772183	0,751315	0,731191
4	0,923845	0,822702	0,762895	0,708425	0,683013	0,658731
5	0,905731	0,783526	0,712986	0,649931	0,620921	0,593451
6	0,887971	0,746215	0,666342	0,596267	0,564474	0,534641
7	0,870560	0,710681	0,622750	0,547034	0,513158	0,481658
8	0,853490	0,676839	0,582009	0,501866	0,466507	0,433926
9	0,836755	0,644609	0,543934	0,460428	0,424098	0,390925
10	0,820348	0,613913	0,508349	0,42241 1	0,385543	0,352184
11	0,804263	0,584679	0,475093	0,387533	0,350494	0,317283
12	0,788493	0,556837	0,444012	0,355535	0,318631	0,285841
13	0,773033	0,530321	0,414964	0,326179	0,289664	0,257514
14	0,757875	0,505068	0,387817	0,299246	0,263331	0,231995
15	0,743015	0,481017	0,362446	0,274538	0,239392	0,209004
16	0,728446	0,458112	0,338735	0,251870	0,217629	0,188292
17	0,714163	0,436297	0,316574	0,231073	0,197845	0,169633
18	0,700159	0,415521	0,295864	0,211994	0,179859	0,152822
19	0,686431	0,395734	0,276508	0,194490	0,163508	0,137678
20	0,672971	0,376889	0,258419	0,178431	0,148644	0,124034
21	0,659776	0,358942	0,241513	0,163698	0,135131	0,111742
22	0,646839	0,341850	0,225713	0,150182	0,122846	0,100669
23	0,634156	0,325571	0,210947	0,137781	0,111678	0,090693
24	0,621721	0,310068	0,197147	0,126405	0,101526	0,081705
25	0,609531	0,295303	0,184249	0,115968	0,092296	0,073608
26	0,597579	0,281241	0,172195	0,106393	0,083905	0,066314
27	0,585862	0,267848	0,160930	0,097608	0,076278	0,059742
28	0,574375	0,255094	0,150402	0,089548	0,069343	0,053822
29	0,563112	0,242946	0,140563	0,082155	0,063039	0,048488
30	0,552071	0,231377	0,131367	0,075371	0,057309	0,043683
35	0,500028	0,181290	0,093663	0,048986	0,035584	0,025924
40	0,452890	0,142046	0,066780	0,031838	0,022095	0,015384
45	0,410197	0,111297	0,047613	0,020692	0,013719	0,009130
50	0,371528	0,087204	0,033948	0,013449	0,008519	0,005418

Приложение 3(продолжение таблицы).

Число периодов n	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,819672	0,800000
2	0,783147	0,756144	0,718184	0,694444	0,671862	0,640000
3	0,693050	0,657516	0,608631	0,578704	0,550707	0,512000
4	0,613319	0,571753	0,515789	0,482253	0,451399	0,409600
5	0,542760	0,497177	0,437109	0,401878	0,369999	0,327680
6	0,480319	0,432328	0,370432	0,334898	0,303278	0,262144
7	0,425061	0,375937	0,313925	0,279082	0,248589	0,209715
8	0,376160	0,326902	0,266038	0,232568	0,203761	0,167772
9	0,332885	0,284262	0,225456	0,193807	0,167017	0,134218
10	0,294588	0,247185	0,191064	0,161506	0,136899	0,107374
11	0,260698	0,214943	0,161919	0,134588	0,112213	0,085899
12	0,230706	0,186907	0,137220	0,112157	0,091978	0,068719
13	0,204165	0,162528	0,116288	0,093464	0,075391	0,054976
14	0,180677	0,141329	0,098549	0,077887	0,061796	0,043980
15	0,159891	0,122894	0,083516	0,064905	0,050653	0,035184
16	0,141496	0,106865	0,070776	0,054088	0,041519	0,028147
17	0,125218	0,092926	0,059980	0,045073	0,034032	0,022518
18	0,110812	0,080805	0,050830	0,037561	0,027895	0,018014
19	0,098064	0,070265	0,043077	0,031301	0,022865	0,014412
20	0,086782	0,061100	0,036506	0,026084	0,018741	0,011529
21	0,076798	0,053131	0,030937	0,021737	0,015362	0,009223
22	0,067963	0,046201	0,026218	0,018114	0,012592	0,007379
23	0,060144	0,040174	0,022218	0,015095	0,010321	0,005903
24	0,053225	0,034934	0,018829	0,012579	0,008460	0,004722
25	0,047102	0,030378	0,015957	0,010483	0,006934	0,003778
26	0,041683	0,026415	0,013523	0,008735	0,005684	0,003022
27	0,036888	0,022970	0,011460	0,007280	0,004659	0,002418
28	0,032644	0,019974	0,009712	0,006066	'0,003819	0,001934
29	0,028889	0,017369	0,008230	0,005055	0,003130	0,001547
30	0,025565	0,015103	0,006975	0,004213	0,002566	0,001238
35	0,013876	0,007509	0,003049	0,001693	0,000949	0,000406
40	0,007531	0,003733	0,001333	0,000680	0,000351	0,000133
45	0,004088	0,001856	0,000583	0,000273	0,000130	0,000044
50	0,002219	0,000923	0,000255	0,000110	0,000048	0,000014

Приложение 4

Облигация внутреннего государственного займа России, 1917г.

Разрядъ первый.

200 200

Серія номеръ 13214

Билетъ номеръ 76

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ВНУТРЕННІЙ 4½% ВЫИГРЫШНЫЙ ЗАЕМЪ 1917 ГОДА,
выпущенный на основаніи постановленія Временнаго Правительства отъ 11-го Августа 1917 года.

БИЛЕТЪ

ВЪ ДВѢСТИ РУБЛЕЙ НАРИЦАТЕЛЬНЫХЪ
НА ПРЕДЪЯВИТЕЛЯ.

Заемъ сей внесенъ въ Государственную Долговую Книгу подъ названіемъ "Государственный внутренній четырехъ съ половиной процентный выигрышный заемъ 1917 года".

Билеты сего займа выпускаются именные и на предъявителя, достоинствомъ въ 200 рублей нарицательныхъ.

Владѣлецъ настоящаго билета участвуетъ въ займѣ суммою въ 200 рублей, приносящей четыре съ половиной процента въ годъ до погашенія билета павшимъ на него выигрышемъ.

Доходъ по билетамъ перваго разряда уплачивается два раза въ годъ: 16 Іюня и 16 Декабря по предъявленіи купоновъ въ Конторахъ и Отдѣленіяхъ Государственнаго Банка, Казначействахъ, а равно и въ Государственныхъ Сберегательныхъ Кассахъ.

Теченіе процентовъ по билетамъ настоящаго разряда начинается 16 Декабря 1917 года.

Тиражи выигрышей, происходящіе публично въ мѣстахъ, назначаемыхъ Министромъ Финансовъ, производятся для настоящаго разряда 16 Іюня и 16 Декабря каждаго года.

Первый тиражъ выигрышей для перваго разряда займа назначается на 16 Іюня 1918 года.

Выплата выигрышей производится въ Конторахъ и Отдѣленіяхъ Государственнаго Банка спустя три мѣсяца послѣ тиража выигрышей, по предъявленіи билетовъ со всѣми купонами, срокъ оплаты коихъ наступаетъ послѣ срока тиража, въ коемъ палъ выигрышъ на предъявляемый билетъ; стоимость недостающихъ купоновъ будетъ удержана изъ суммы выигрыша.

Приносимый означеннымъ займомъ доходъ въ размѣрѣ 4½% въ годъ, а равно уплачиваемые по займу выигрыши, освобождаются навсегда отъ сбора съ доходовъ отъ денежныхъ капиталовъ.

Оплата выигрышей производится въ теченіе 30 лѣтъ со дня, назначеннаго для начала таковой уплаты, а купоновъ — въ теченіе 10 лѣтъ съ наступленія по нимъ сроковъ.

Билеты сего займа принимаются по цѣнамъ, устанавливаемымъ на каждое полугодіе Министромъ Финансовъ и публикуемымъ черезъ Правительствующій Сенатъ, въ залоги: а) по казеннымъ подрядамъ и поставкамъ, б) по обезпеченію таможенныхъ пошлинъ.

Бухгалтеръ

Управляющій Государственною Коммиссіею Погашенія Долговъ

Срокъ послѣдняго купона 16 Декабря 1927 года.

AMERICAN BANK NOTE COMPANY.

Облигация государственного займа СССР, 1944 г.

Третий Государственный военный заем

Облигация государственного займа СССР, 1946 г.

Государственный заем восстановления и развития народного хозяйства СССР

Облигация государственного займа СССР, 1956 г.

Государственный заем развития народного хозяйства СССР

Казначейская облигация США